

自由に利用していただいて結構ですが、
利用した場合は、その旨お知らせ下さい。
また、ミスを見つけた場合もお知らせ
いただければ助かります。

2022年11月（初版）

2023年9月（v1.4）

磁気座標系

— VMEC コード、 Boozer 座標系、 Ballooning モード方程式 —

京都大学大学院エネルギー科学研究科 中村祐司

1. はじめに

磁場閉じ込めトーラスプラズマの解析においては、MHD 平衡計算の結果がベースとなることが多い。これはそもそも磁気流体としてのプラズマが力学的平衡状態から大きく外れると、高温プラズマの閉じ込めができなくなるからである。したがって、プラズマの理論的解析においては MHD 平衡状態にあるプラズマに対して（ミクロ、マクロを含む）安定性解析、輸送解析、加熱や SOL・ダイバータ領域の解析などが行われる。軸対称トーラスプラズマでは MHD 平衡にトロイダル角依存性がないため、2次元解析が可能な場合も多いが、ヘリカル系プラズマや様々な要因で非軸対称磁場成分を有するトカマクのような非軸対称トーラスプラズマの解析では、磁気面の幾何形状や磁場構造が複雑なため、磁気座標系を利用した解析を行うことが多い。このような非軸対称トーラスプラズマの MHD 平衡を効率よく計算するコードとして、世界的にもほとんどスタンダードとして用いられているのが、米国オークリッジ国立研究所に在籍した S. P. Hirshman が中心となって開発された VMEC コードである。このコードは、通常の Grad-Shafranov 方程式のように実座標における磁束を求めるようなオイラー的なプログラムではなく、入れ子状の磁気面の存在を仮定し、磁場分布や磁気面形状を磁気座標の関数として求めるラグランジュ的な逆解法プログラム（inverse solver）である。非軸対称トーラスプラズマにおける様々な理論解析では VMEC により磁気座標系上で求められた様々な物理量を用いることとなる。したがって、VMEC で用いている磁気座標系に関する知識が必要となる。また、この VMEC で用いられている磁気座標系は磁力線が直線に見える座標系（Straight Field Line coordinates; SFL 座標系）ではないため、SLF 座標系の一つであり、より実用性が高い Boozer 座標系に変換して解析に用いることが多い。さらに Ballooning モード方程式や磁束管モデルで用いられている磁力線方向を座標のひとつとして用いる磁気座標系を用いることもある。このメモではこれらの解析で有用となる様々な表現について解説、記述する。初心者用に様々な説明も加えているが、ある程度知識のある方は、4.2 章以降のみ見ていただければ良い。

2. 準備

2.1 MHD 平衡

トラスプラズマの磁場閉じ込めを考える上で最も重要な事は、閉じ込めに適した MHD 平衡が存在するかどうかである。超高温プラズマを真空容器内に閉じ込めるには、プラズマの中心領域は超高温であっても、周辺領域ではプラズマ温度、密度は低い状態にしなければならない。実際にはコアのプラズマ閉じ込め領域の外に SOL 領域があり、単純な構造をしているのではないが、いずれにせよ流体的に考えれば強い圧力勾配による力を電磁的に支えることのできる状態、すなわち MHD 平衡が成り立つ必要がある。通常、平衡状態においてプラズマの流れは MHD オーダリングで考えている熱速度より十分遅いので、MHD 平衡を考えるときは、プラズマ流のない静止平衡を考える場合が殆どである。そこで、MHD 方程式系において $\partial/\partial t = 0$, $\vec{u} = 0$ とおくと

$$-\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$\mu_0 \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

が得られる。これが MHD 平衡時に成り立つ方程式系である。式 (2.1) は MHD 力のバランスを表わしており、プラズマの圧力勾配による力、 $-\nabla p$ とローレンツ力に起因する電磁力、 $\vec{j} \times \vec{B}$ とが釣り合った状態が MHD 平衡であることを示している。

今、MHD 平衡が存在し、圧力勾配を保った状態があると仮定すれば、式 (2.1) より、 $\vec{B} \cdot \nabla p = \vec{j} \cdot \nabla p = 0$ となり磁力線と電流線は等圧面上に乗っている ($\vec{B} \cdot \nabla p = 0$ は磁力線方向の圧力勾配がない、もしくは等圧面の法線方向の磁場成分はゼロであることを示しており、いずれの解釈にしても磁力線は等圧面上に乗っていることになる)。一般に式 (2.3) のように発散がゼロとなるベクトル場は $\vec{B} = \nabla \rho \times \nabla \alpha$ の形で表わすことができる (この形で表現すると $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ が自動的に満足されることに注意。詳しい証明は省略)。これは磁場の Clebsch 表現と呼ばれる。この場合、図 1 に示したように ρ 一定面と α 一定面の交線が磁力線を表わす。そこで ρ 一定面と等圧面が一致するように選べば p は ρ のみの関数となる。このとき ρ 一定面を磁気面 (magnetic flux surface) と呼び、 ρ は磁気面のラベルを表わす。一方磁気面上で $\alpha = const.$ は磁力線を表わし、 α は磁力線のラベルと呼ばれる。

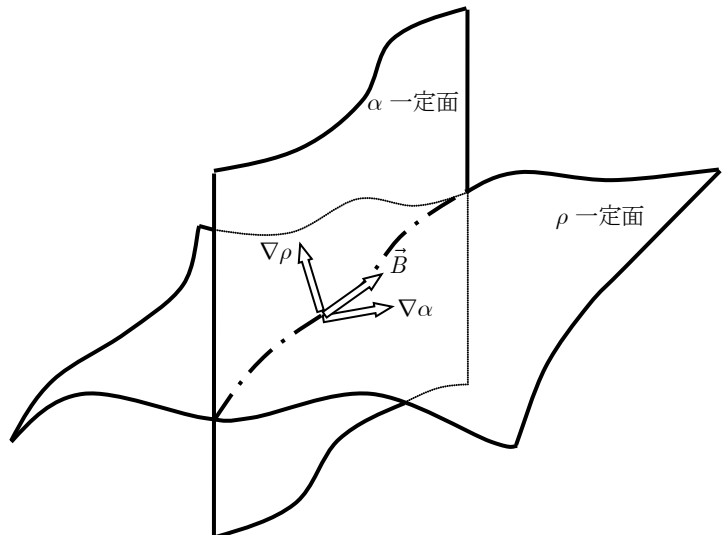


図1 磁場の Clebsch 表現

プラズマを真空容器壁から離れた状態で閉じ込めるには磁気面が閉曲面でなければならない。ポアンカレの

定理によると、閉じた磁気面上で磁場がゼロとなる場所を持たないためには、磁気面は球状などではなくトーラスでなければならない。有名なたとえ話では、髪の毛の生えた閉曲面において櫛で髪の毛をとく場合、分け目や渦巻きなどを作らずにスムーズに髪をとかすことのできるのは閉曲面がトーラスである場合だけである。

磁力線が等圧面もしくは磁気面上に乗っていることは、逆に言えば磁力線がトーラス状の閉曲面を織りなしていることになる。すなわち1本の磁力線をたどっていくと、磁力線は交差することはないので、その磁力線が閉曲線でない限りいつまでも面上を進み、面を無限に覆い尽くす（2次元のエルゴート性）。従って、磁力線を追跡したときそれが閉曲面を織りなすならば、この面が磁気面であると定義することもできる。一般には1つの円環面状の磁気面の中には別の磁力線が織りなす磁気面が入れ子状に存在することができ（図2）、このような構造を持つ磁気面を入れ子状の磁気面（nested flux surfaces）と呼ぶ。中心の縮退した磁気面は一本の磁力線になり磁気軸と呼ばれる。MHD 平衡方程式は入れ子状の磁気面が存在すれば圧力勾配を支えることができることを示している。

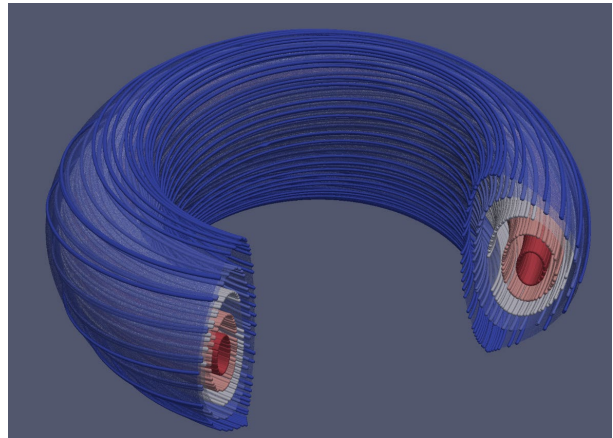


図2 磁力線の織り成す磁気面

2.2 一般曲線座標系 (curvilinear coordinates)

軸対称性が使えない非軸対称トーラスプラズマの三次元 MHD 平衡を得るのは容易でない。このように複雑な幾何形状を記述するには磁気座標(magnetic flux coordinates)と呼ばれる一般曲線座標系を用いると便利である。

最初に、一般曲線座標系について解説する。詳しくは、微分幾何学の教科書や場の理論の教科書などを参照のこと。通常の直交座標系（デカルト座標、Cartesian coordinates；ここでは座標を (x, y, z) の代わりに (r_1, r_2, r_3) と書くことにする）はベクトル解析を行うには便利な座標系であるが、複雑な形状をもつ場における物理量を記述するには、その形状に沿った座標系を用いることが望ましい。例えば、円柱状の形状を考えるには円柱座標を用いる方がよい。この円柱座標は直交曲線座標系であり、各座標方向の単位ベクトルは互いに直交しているの

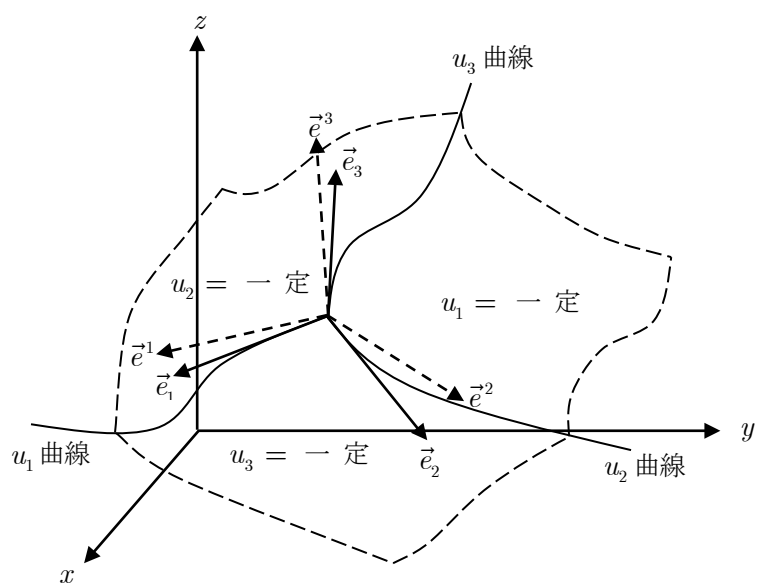


図3. 一般曲線座標系

でわかりやすいが、もっと複雑な曲がりくねった座標系では各座標方向のベクトルは一般には直交していない。また、デカルト座標では、たとえば x 方向のベクトルと $x = \text{一定面}$ 、すなわち yz 平面に垂直なベクトルの向きは同じであるため、任意の位置ベクトルの向きの基準となる基底ベクトルは位置によらず x, y, z のそれぞれ 3 方向のベクトルとなるが、非直交の座標系 (u_1, u_2, u_3) では、 u_1 方向のベクトルと $u_1 = \text{一定面}$ に垂直なベクトルの向きは異なる上、位置によっても変化する。そこで、最初に基底ベクトルを定義する。

任意の点の位置ベクトルをデカルト座標系において $\vec{r} = r_1 \vec{i}_1 + r_2 \vec{i}_2 + r_3 \vec{i}_3 = r_j \vec{i}_j$ とする。ここで $\vec{i}_j \equiv \nabla r_j$ は r_j 方向の単位ベクトルである。これを用いて共変基底ベクトル (covariant basis vector) を

$$\vec{e}_i \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \quad (2.4)$$

と定義する。偏微分の定義よりこれは u_j, u_k を固定したまま u_i を変化させたときの位置ベクトルの変化を表し、 u_i 座標曲線の接線ベクトルとなる (図 3)。一般には共変基底ベクトルは互いに直交しないことに注意する必要がある。これに対し

$$\vec{e}^i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial \vec{r}} = \nabla u_i \quad (2.5)$$

を反変基底ベクトル (contravariant basis vector) と呼ぶ。これは勾配 ∇ の定義より $u_i = \text{一定面}$ に垂直なベクトルである。通常、「共変」と付くものには下付きの成分添字を、「反変」には上付きの添字をつける。これは、式(2.4)、(2.5)の定義式で座標 u_i が下 (分母) にあるのか上 (分子) にあるのかで決まっていると考えればよい。

共変基底ベクトル \vec{e}_i は u_j 一定面と u_k 一定面に接するベクトルで、反変基底ベクトル \vec{e}^j は u_j 一定面に垂直なベクトルであるので $i \neq j$ に対して $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = 0$ が成り立つ。また、

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \left(\frac{\partial r_k}{\partial u_i} \right) \vec{i}_k \cdot \left(\frac{\partial u_j}{\partial r_k} \right) \vec{i}_k = \frac{du_j}{du_i} = \delta_{ij} \quad (2.6)$$

が成り立つ。式(2.6)の第二辺では添字 k についての総和記号 Σ が省略されている。これ以降、成分を表す同じ添字が二度現れた場合には総和記号 Σ を省略することにする (アインシュタインの省略)。

一般曲線座標系 (u_1, u_2, u_3) からデカルト座標系 (r_1, r_2, r_3) への変換のヤコビアン \mathcal{J} は

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\partial(r_1, r_2, r_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \quad (2.7)$$

で表される。これを用いると、式(2.6)より、任意の循環的並びを持つ (i, j, k) に対して

$$\vec{e}^i = \mathcal{J}^{-1} \vec{e}_j \times \vec{e}_k \quad (2.8)$$

となることが分かる。さらに、式(2.8)より

$$\begin{aligned} \vec{e}^j \times \vec{e}^k &= \mathcal{J}^{-2} (\vec{e}_k \times \vec{e}_i) \times (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) \\ &= \mathcal{J}^{-2} ((\vec{e}_k \times \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_i - (\vec{e}_k \times \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_j) \\ &= \mathcal{J}^{-1} \vec{e}_i \end{aligned}$$

となるので、

$$\vec{e}_i = \mathcal{J} \vec{e}^j \times \vec{e}^k = \mathcal{J} \nabla u_j \times \nabla u_k \quad (2.9)$$

が得られる。多くの場合、表式(2.4)は使いにくいので、共変基底ベクトルとして式(2.9)の表式を使うことが多い。さらに式(2.9)と $\vec{e}^i = \nabla u_i$ との内積を取れば、

$$\mathcal{J} = (\vec{e}^1 \cdot \vec{e}^2 \times \vec{e}^3)^{-1} = (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3)^{-1} \quad (2.10)$$

が求められる。ヤコビアンヤコビアンの表式も式(2.7)より、式(2.10)を使うことが多い。

次に微分幾何学的関係式を求めておく。微分弧長 $ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$ は

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} du_i = \vec{e}_i du_i \quad (2.11)$$

より、

$$ds^2 = g_{ij} du_i du_j \quad (2.12)$$

となる。ここで g_{ij} は (共変) 計量テンソル ((covariant) metric tensor) と呼ばれ、

$$g_{ij} = g_{ji} \equiv \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_k \frac{\partial r_k}{\partial u_i} \frac{\partial r_k}{\partial u_j} \quad (2.13)$$

で表される。式(2.7)と(2.13)より計量テンソル g_{ij} の行列式 $g \equiv \det g_{ij}$ はヤコビアンの自乗であることが分かるので

$$\sqrt{g} = \mathcal{J} \quad (2.14)$$

をヤコビアンの記号として使うこともある。さらに $\sum_j \vec{e}_j \vec{e}^j$ が単位テンソルとなることを用いると、式(2.13)より、計量テンソルは

$$\vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j \quad (2.15)$$

のように反変基底ベクトルから共変基底ベクトルの変換に用いることができることが分かる。ここで、 j について総和をとることに注意。同様に

$$g^{ij} = g^{ji} \equiv \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j = \nabla u_i \cdot \nabla u_j \quad (2.16)$$

と定義すると、

$$\vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j \quad (2.17)$$

が得られる。式(2.6)、(2.15)および(2.17)より

$$g_{ij} g^{ji} = 1$$

なので (i と j の両方に対して総和をとる)、 g^{ij} テンソルは計量テンソル g_{ij} の逆行列から求められることが分かる。 g^{ij} は式(2.16)からも直接計算できる。

u_i 座標曲線に沿った微分線素ベクトルは

$$d\vec{s}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} du_i = \vec{e}_i du_i = (\mathcal{J} \nabla u_j \times \nabla u_k) du_i \quad (2.18)$$

となる。また、 u_i 一定面に垂直な方向をもつ微分面積素は

$$\begin{aligned}
d\vec{S}_i &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} du_j \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} du_k \\
&= \vec{e}_j \times \vec{e}_k du_j du_k \\
&= \mathcal{J} \vec{e}^i du_j du_k \\
&= \mathcal{J} \nabla u_i du_j du_k
\end{aligned} \tag{2.19}$$

となり、同様に微分体積素は

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} du_i \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_j} du_j \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_k} du_k \\
&= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \times \vec{e}_k du_i du_j du_k \\
&= \mathcal{J} du_i du_j du_k
\end{aligned} \tag{2.20}$$

と書くことができる。

以上のように基底ベクトルを定義することができたので、これを用いて任意のベクトル \vec{A} の成分表示を求めらる。基底ベクトルは共変と反変の2種類あるので、それぞれに対して

$$\vec{A} = A^i \vec{e}_i = \sum_i A^i (\mathcal{J} \nabla u_j \times \nabla u_k) \tag{2.21}$$

$$\vec{A} = A_i \vec{e}^i = \sum_i A_i \nabla u_i \tag{2.22}$$

と書くことにする ((i, j, k) は循環的並びを持つとする)。

ここで A^i 、 A_i は式(2.21)、(2.22)にそれぞれ $\vec{e}^i \cdot$ 、 $\vec{e}_i \cdot$ を作用させ、式(2.6)を用いることにより求められ、

$$A^i = \vec{A} \cdot \vec{e}^i = \vec{A} \cdot \nabla u_i \tag{2.23}$$

$$A_i = \vec{A} \cdot \vec{e}_i = \vec{A} \cdot (\mathcal{J} \nabla u_j \times \nabla u_k) \tag{2.24}$$

となる。 A^i はベクトル \vec{A} の反変成分 (contravariant component)、 A_i は共変成分 (covariant component) と呼ばれる。上 (下) 付きの添字を持つベクトル (反変 (共変) 基底ベクトル) との内積で得られた成分は上 (下) 付きの添字を持つ (反変 (共変)) と覚えておけばよい。なお、式(2.21)、(2.22)においてもアインシュタインの省略を用いているが添字が上付きと下付きのペアになっていることに注意。式(2.21)はベクトルの反変成分表示、(2.22)は共変成分表示と呼ばれる。また、式(2.15)、(2.17)より A_i と A^i は

$$A^i = g^{ij} A_j \tag{2.25}$$

$$A_i = g_{ij} A^j \tag{2.26}$$

のように計量テンソルを用いて変換される。

一般曲線座標系の説明の最後に、ベクトル演算子について述べる。まず、ベクトルの内積は

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j B_j = A_i g^{ij} B_j = A_i B^i = A^i B_i \tag{2.27}$$

と書ける。次にベクトルの外積は

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= (\vec{A} \times \vec{B})_i \vec{e}^i = (\mathcal{J} \varepsilon_{ijk} A^j B^k) \nabla u_i \\
&= (\vec{A} \times \vec{B})^i \vec{e}_i = (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \nabla u_j \times \nabla u_k
\end{aligned} \tag{2.28}$$

と書くことができる。

任意のスカラー関数 f の勾配 (gradient) は

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \nabla u_i \quad (2.29)$$

となり、式(3.35)よりこれは ∇f の共変成分表示であることがわかる。このことは勾配が共変ベクトルであることを意味し、 ∇f の共変成分は

$$(\nabla f)_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} \quad (2.30)$$

となる。次に任意のベクトル \vec{A} の発散 (divergence) は

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial u_i} (\mathcal{J} A^i) \quad (2.31)$$

と書くことができ、 \vec{A} の反変成分を用いて書き表される。また、任意のベクトル \vec{A} の回転 (rotation) は

$$\nabla \times \vec{A} = \sum_i \left(\sum_{j,k} \frac{1}{\mathcal{J}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial u_j} \right) \vec{e}_i \quad (2.32)$$

のように反変成分表示が便利で、 \vec{A} の共変成分を用いて書き表される。ここで ε_{ijk} は Eddington のイプシロン、Levi-Civita シンボル、完全反対称テンソルなどと呼ばれているもので、 (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の偶置換ならば +1、奇置換ならば -1、それ以外ならば 0 となる。さらに f のラプラシアンは

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\mathcal{J} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u_j} \right) \quad (2.33)$$

と書ける。

曲線座標系のまとめ

共変 (covariant) 基底ベクトル

$$\vec{e}_i = \mathcal{J} \nabla u_j \times \nabla u_k \quad (i, j, k \text{ は循環的並び})$$

反変 (contravariant) 基底ベクトル

$$\vec{e}^i = \nabla u_i$$

計量テンソル (metric tensor)

$$g_{ij} = g_{ji} = \sum_k \frac{\partial r_k}{\partial u_i} \frac{\partial r_k}{\partial u_j}$$

$$g^{ij} = g^{ji} = \nabla u_i \cdot \nabla u_j$$

ヤコビアン

$$\mathcal{J} = \sqrt{g} = (\nabla u_1 \cdot \nabla u_2 \times \nabla u_3)^{-1} \quad g = \det g_{ij}$$

ベクトルの反変 (contravariant) 成分

$$A^i = \vec{A} \cdot \nabla u_i$$

ベクトルの共変 (covariant) 成分

$$A_i = \vec{A} \cdot (\mathcal{J} \nabla u_j \times \nabla u_k) \quad (i, j, k \text{ は循環的並び})$$

ベクトルの反変成分表示

$$\vec{A} = \sum_i A^i (\mathcal{J} \nabla u_j \times \nabla u_k) \quad (i, j, k \text{ は循環的並び})$$

ベクトルの共変成分表示

$$\vec{A} = \sum_i A_i \nabla u_i$$

反変成分と共変成分の変換

$$A^i = \sum_j g^{ij} A_j$$

$$A_i = \sum_j g_{ij} A^j$$

ベクトル演算

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B^i = A^i B_i$$

$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= (\mathcal{J} \varepsilon_{ijk} A^j B^k) \nabla u_i \\
&= (\varepsilon_{ijk} A_j B_k) \nabla u_j \times \nabla u_k \\
\nabla f &= \left(\frac{\partial f}{\partial u_i} \right) \nabla u_i \\
\nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial u_i} (\mathcal{J} A^i) \\
\nabla \times \vec{A} &= \sum_i \left(\sum_{j,k} \frac{1}{\mathcal{J}} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial u_j} \right) \vec{e}_i \\
\Delta f &= \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\mathcal{J} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial u_j} \right)
\end{aligned}$$

3. 磁気座標系(magnetic flux coordinate system)の一般的議論

2.2節において一般曲線座標系を導入したが、ここで一般曲線座標系の一種として磁気座標 (ρ, θ, ζ) を図4のように定義する。また、円柱座標 (R, φ, Z) も図4に示す。径方向の座標となる ρ は前述の通り任意の磁気面のラベルであり、 θ はポロイダル角、 ζ はトロイダル角である。ただし θ と ζ は幾何学的な角度ではなく、それぞれ磁気面上をポロイダル又はトロイダル方向に一周するとゼロから 2π に変化する一般化された角度である。 θ と ζ が一周する間にどのように変化するかは任意性があり、都合の良いように与えることができる。したがって、その選び方により色々な磁気座標系が存在する。磁場がトロイダルおよびポロイダル方向に周期性と一価性を持つことより、磁場の Clebsch 表現における磁力線のラベル α は θ や ζ と線形の関係があるか θ や ζ の周期関数でなければならない。従って、 α は一般性を失うことなく

$$\alpha = a(\rho)\theta + b(\rho)\zeta + \tilde{\alpha}(\rho, \theta, \zeta) \quad (3.1)$$

と書く事ができる。ここで θ 、 ζ の係数(考えている ρ という磁気面上で定数)をそれぞれ a 、 b と書いた。また $\tilde{\alpha}$ は θ と ζ の任意の周期関数である。このとき磁場は Clebsch 表現より

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla\rho \times \nabla(a\theta + b\zeta + \tilde{\alpha}) \\ &= -b\nabla\zeta \times \nabla\rho + b\nabla\rho \times \nabla\theta + \nabla\rho \times \nabla\tilde{\alpha} \\ &= -\left(b + \frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\zeta}\right)\nabla\zeta \times \nabla\rho + \left(a + \frac{\partial\tilde{\alpha}}{\partial\theta}\right)\nabla\rho \times \nabla\theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

と書ける。

便利のため、 (ρ, θ, ζ) 座標系における微分演算子を書き下しておく(式(2.30)-(2.32)を用いた)。

$$\begin{aligned} \nabla f &= \nabla\rho \frac{\partial f}{\partial\rho} + \nabla\theta \frac{\partial f}{\partial\theta} + \nabla\zeta \frac{\partial f}{\partial\zeta} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial\rho} (\mathcal{J}A^\rho) + \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial\theta} (\mathcal{J}A^\theta) + \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial\zeta} (\mathcal{J}A^\zeta) \\ \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\frac{\partial A_\zeta}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\zeta} \right) (\mathcal{J} \nabla\theta \times \nabla\zeta) \\ &\quad + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial\zeta} - \frac{\partial A_\zeta}{\partial\rho} \right) (\mathcal{J} \nabla\zeta \times \nabla\rho) + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta} \right) (\mathcal{J} \nabla\rho \times \nabla\theta) \end{aligned}$$

今の段階では、磁場は式(3.2)のような形で書けるといっただけで、係数 a 、 b が物理的に何に対応しているのかは分からない。そこで、磁場がどのように表現されているときのトロイダルおよびポロイダル磁束を計算してみよう。プラズマ柱のトロイダル面 S_t とポロイダル面 S_p (図5)を横切る磁束はそれぞれトロイダル磁束 Φ_{tor} と

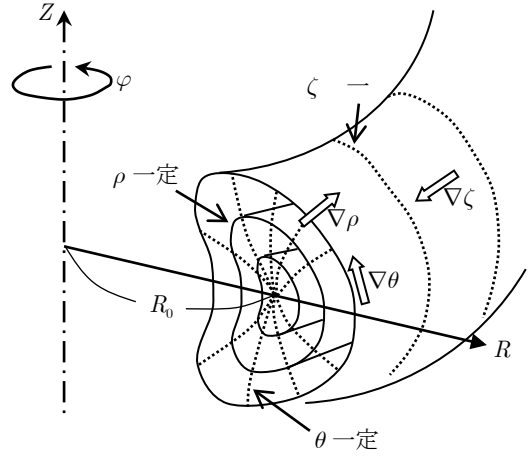


図4 磁気座標系 (ρ, θ, ζ)

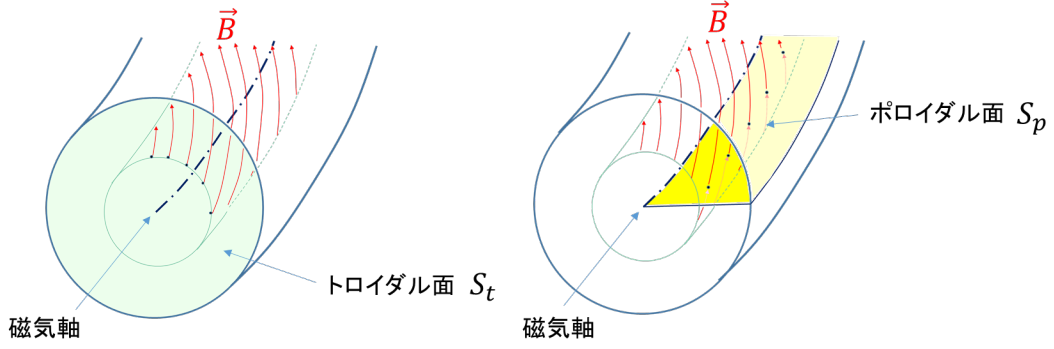


図5 トロイダル磁束とポロイダル磁束を定義する
トロイダル面とポロイダル面

ポロイダル磁束 Φ_{pol} と呼ばれ、式(3.2)より式(2.19)、(2.20)を用いれば

$$\Phi_{tor} \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_t = \frac{1}{2\pi} \int (\vec{B} \cdot \nabla \zeta) dV = 2\pi \int a(\rho) d\rho \quad (3.3)$$

$$\Phi_{pol} \equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_p = \frac{1}{2\pi} \int (\vec{B} \cdot \nabla \theta) dV = -2\pi \int b(\rho) d\rho \quad (3.4)$$

で表わされる。式(3.3)と(3.4)の第二辺から第三辺への変形には Gauss の発散定理を用いる (ただし、体積積分や面積分を考えると、トーラスを S_p 面や S_t 面で切断した形状を考える必要があるため、少し工夫が必要である)。したがって、式(3.1)の係数 a 、 b はそれぞれトロイダル磁束、ポロイダル磁束と上式のような関係がなければならない。そこで、

$$\phi(\rho) \equiv \Phi_{tor} / 2\pi \quad (3.5)$$

$$\chi(\rho) \equiv \Phi_{pol} / 2\pi \quad (3.6)$$

という変数を定義すると $a = \phi'$ ($= d\phi / d\rho$)、 $b = -\chi'$ ($= -d\chi / d\rho$) と書くことができ、磁力線のラベルは

$$\alpha = \phi'(\rho)\theta - \chi'(\rho)\zeta + \tilde{\alpha}(\rho, \theta, \zeta) \quad (3.7)$$

となる。したがって式(3.2)の磁場表現は、磁束を用いて

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \rho \times \nabla (\phi'\theta - \chi'\zeta + \tilde{\alpha}) \\ &= \chi' \nabla \zeta \times \nabla \rho + \phi' \nabla \rho \times \nabla \theta + \nabla \rho \times \nabla \tilde{\alpha} \\ &= \nabla \zeta \times \nabla \chi + \nabla \phi \times \nabla \theta + \nabla \rho \times \nabla \tilde{\alpha} \\ &= \left(\chi' - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} \right) \nabla \zeta \times \nabla \rho + \left(\phi' + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} \right) \nabla \rho \times \nabla \theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

と書くことができる。トカマクプラズマの解析では、式(3.6)のポロイダル磁束に対応する関数 χ を ψ という記号と書くことも多いので注意 (安全係数などの記号 q などとはどの文献でも同じだが、磁束に用いる記号は文献によってかなり異なるのでどのような記号を用いているかは要注意)。

式(3.8)はまさに磁場の反変成分表示（式(2.21)）であり、

$$B^\rho = 0, \quad B^\theta = \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\chi' - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} \right), \quad B^\zeta = \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\phi' + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} \right) \quad (3.9)$$

である。ここでヤコビアンは $\mathcal{J} = (\nabla \rho \times \nabla \theta \cdot \nabla \zeta)^{-1}$ である。

磁気面上で $\alpha = \phi'(\rho)\theta - \chi'(\rho)\zeta + \tilde{\alpha}(\rho, \theta, \zeta) = \text{const.}$ は磁力線を表すので、磁力線がトロイダル方向に一周したとき ($\zeta = 0 \rightarrow 2\pi$)、 $\tilde{\alpha}(\rho, \theta, \zeta)$ は周期関数であるからポロイダル方向へは平均的に ($\tilde{\alpha} = 0$ となる座標系を選べば正確に) $\Delta\theta = 2\pi(\chi' / \phi')$ だけ、すなわち (χ' / ϕ') 周回転することになる。そこで、 $2\pi(\chi' / \phi')$ を回転変換角と呼ぶ。また (χ' / ϕ') を回転変換 (rotational transform) と呼び通常 ι (イオタ・バー) と書くが、ここではフォントが紛らわしいため、 ι で表すこととする。したがって、回転変換はポロイダル磁束をトロイダル磁束で微分した値である。

$$\iota(\rho) = \frac{\chi'(\rho)}{\phi'(\rho)} = \frac{d\chi}{d\phi} \quad (3.10)$$

逆に、磁力線がポロイダル方向に一周するときトロイダル方向に何周するかを表わす量を安全係数 (safety factor) と呼び、通常 q で表す。

$$q(\rho) = \iota(\rho)^{-1} = \frac{\phi'(\rho)}{\chi'(\rho)} = \frac{d\phi}{d\chi} \quad (3.11)$$

とくに ι が有理数 n/m (m, n は整数) となる場合、磁力線はトロイダル方向に m 周するとポロイダル方向に n 周して元の位置に戻ってくるため、一本の磁力線は閉曲線となり磁気面を覆い尽くさない。このような磁気面は有理面 (rational surface) もしくは共鳴面と呼ばれ、MHD など多くのトーラスプラズマ理論において重要である。また、 ι が径方向 (ρ 方向) に変化するとき、すなわち $du/d\rho \neq 0$ のとき、磁力線の巻付き方が ρ とともに変化するので磁気シア (捩れ) があると表現される。磁気シアがあると有理面は径方向に広がらない。従って、磁気シアはMHD安定性のための重要な因子である。

トカマクプラズマの理論では ι よりもむしろ安全係数 (safety factor) $q = 1/\iota$ を用いることが多い。トカマクでは外部キンク不安定性のような危険な電流駆動型 MHD 不安定性を抑えるため、MHD 平衡に必要なポロイダル磁場と比べて十分に強いトロイダル磁場 (縦磁場) で安定化している。このポロイダル磁場はプラズマ電流が作るため、 q はおおよそプラズマ電流に反比例する。したがってプラズマ電流を増加すると q は下がる。しかし MHD 安定性理論によれば、 q が 1 を下回ると危険な外部キンク不安定性が現れる恐れがある。そこで、トカマクでは流すことのできるプラズマ電流の上限を決めるための指標として「安全係数」 q が用いられる。

次に、プラズマ中を流れる電流密度 (ベクトル) についても磁気座標系で記述してみよう。MHD 平衡状態ではプラズマ電流密度も磁気面あるいは等圧面に沿って流れ、 $\nabla \cdot \vec{j} = 0$ であるので、磁場の表現と同様に、

$$\begin{aligned}
\mu_0 \vec{j} &= \nabla \rho \times \nabla (I'(\rho)\theta + J'(\rho)\zeta - \tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta)) \\
&= -J' \nabla \zeta \times \nabla \rho + I' \nabla \rho \times \nabla \theta - \nabla \rho \times \nabla \tilde{\beta} \\
&= -\nabla \zeta \times \nabla J + \nabla I \times \nabla \theta - \nabla \rho \times \nabla \tilde{\beta} \\
&= -\left(J' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \zeta} \right) \nabla \zeta \times \nabla \rho + \left(I' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \theta} \right) \nabla \rho \times \nabla \theta
\end{aligned} \tag{3.12}$$

の形で書くことができる。すなわち電流密度ベクトルの反変成分は

$$\mu_0 j^\rho = 0, \quad \mu_0 j^\theta = -\frac{1}{\mathcal{J}} \left(J' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \zeta} \right), \quad \mu_0 j^\zeta = \frac{1}{\mathcal{J}} \left(I' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \theta} \right) \tag{3.13}$$

となることが分かる。ここでプライムは ρ 微分を表す。

ポロイダル磁束やトロイダル磁束と同様の議論から、 I は考えているトロイダル面を横切るトロイダル電流 I_{tor} を $\mu_0 / 2\pi$ 倍したもの、 J は考えている磁気面を囲むように流れるポロイダル電流 I_{pol} を $\mu_0 / 2\pi$ 倍したものであることが分かる。

$$\mu_0 I_{tor}(\rho) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{V_{inside}} (\vec{j} \cdot \nabla \zeta) dV = 2\pi I(\rho) \tag{3.14}$$

$$\mu_0 I_{pol}(\rho) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{V_{outside}} (\vec{j} \cdot \nabla \theta) dV = 2\pi J(\rho) \tag{3.15}$$

トカマクでは、 I_{pol} はプラズマ中のポロイダル電流とトロイダルコイルなど外部コイルに流すポロイダル方向の電流を含む。とくにプラズマ表面（一番外側）の磁気面を考えると、理想的には、 I_{pol} はトロイダルコイル電流など外部コイル電流（のポロイダル成分）そのものとなる。

プラズマ電流は式(2.2)のように磁場の回転で表され、式(2.32)より

$$\begin{aligned}
\mu_0 \vec{j} &= \nabla \times \vec{B} \\
&= \left(\frac{\partial B_\zeta}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial \zeta} \right) (\nabla \theta \times \nabla \zeta) + \left(\frac{\partial B_\rho}{\partial \zeta} - \frac{\partial B_\zeta}{\partial \rho} \right) (\nabla \zeta \times \nabla \rho) + \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial B_\rho}{\partial \theta} \right) (\nabla \rho \times \nabla \theta)
\end{aligned}$$

となる。この式と式(3.12)との比較から、磁場の共変成分はプラズマ電流と関係しており、

$$B_\rho = \tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \rho}, \quad B_\theta = I(\rho) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta}, \quad B_\zeta = J(\rho) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta} \tag{3.16}$$

と書けることが分かる。ここで θ, ζ の周期関数 $\tilde{\phi}(\rho, \theta, \zeta)$ を新たに導入した。したがって磁場の共変成分表示は

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta) \nabla \rho + I(\rho) \nabla \theta + J(\rho) \nabla \zeta + \nabla \tilde{\phi} \\
&= \left(\tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \rho} \right) \nabla \rho + \left(I(\rho) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \right) \nabla \theta + \left(J(\rho) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta} \right) \nabla \zeta
\end{aligned} \tag{3.17}$$

となる。

以上、一般的な磁気座標系における磁場と電流密度の表現、すなわち反変・共変成分表示を示した。次にプラ

ズマの理論解析に有用な演算の磁気座標系における表現を示す。最初に磁気微分 $\vec{B} \cdot \nabla$ であるが、これは磁場の反変成分を用いれば簡単に書くことができ、

$$\vec{B} \cdot \nabla f = \left(B^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + B^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f = \frac{1}{\mathcal{J}} \left((\chi' - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\phi' + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f \quad (3.18)$$

となる。次にある物理量 f の磁気面平均 (flux surface average) を

$$\langle f \rangle \equiv \frac{\frac{d}{d\rho} \int f dV}{\frac{d}{d\rho} \int dV} = \frac{\oint f \mathcal{J} d\theta d\zeta}{\oint \mathcal{J} d\theta d\zeta} = \frac{1}{V'} \oint f \mathcal{J} d\theta d\zeta \quad (3.19)$$

と定義する。ここで、磁気面で囲まれた体積 V が

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \int \mathcal{J} d\rho d\theta d\zeta \\ V' &= dV / d\rho = \int \mathcal{J} d\theta d\zeta \end{aligned} \quad (3.20)$$

で表されることを用いた。この磁気面平均は磁力線方向の微分演算子 $\vec{B} \cdot \nabla$ を消すのに用いられる。すなわち、任意の一価関数 f に対して

$$\langle \vec{B} \cdot \nabla f \rangle = 0 \quad (3.21)$$

が成り立つ (ここでは詳しく述べないが磁気微分方程式の可解条件である)。また、任意のベクトル \vec{A} に対して

$$\langle \nabla \rho \cdot \nabla \times \vec{A} \rangle = 0 \quad (3.22)$$

が成り立つことも有用である。

次に、MHD力バランスの式を磁気座標で表すと、

$$\begin{aligned} \nabla p &= p' \nabla \rho \\ \vec{j} \times \vec{B} &= \mathcal{J} (j^\theta B^\zeta - j^\zeta B^\theta) \nabla \rho \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \mu_0 p' &= - \left\{ \left(J' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \zeta} \right) B^\zeta + \left(I' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \theta} \right) B^\theta \right\} \\ &= -(J' B^\zeta + I' B^\theta) + \left(B^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + B^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \tilde{\beta} \\ &= -(J' B^\zeta + I' B^\theta) + \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} \end{aligned} \quad (3.23)$$

が得られる。式(3.23)の磁気面平均をとると、式(3.21)の可解条件より

$$\begin{aligned} \mu_0 p' &= -J' \langle B^\zeta \rangle - I' \langle B^\theta \rangle \\ \mu_0 p' \mathcal{V}' &= -J' \phi' - I' \chi' \end{aligned} \quad (3.24)$$

が得られる。ここで、 $\mathcal{V} \equiv V / (2\pi)^2$ と定義した。この式は磁気面平均された MHD 平衡方程式であり、MHD 平衡が成り立つために必要な関係式を表す。また、式(3.23)から式(3.24)を引くと、 $\tilde{\beta}$ に関する磁気微分方程式

$$\vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} = -\mu_0 p' \left(\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{J}} - 1 \right) + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(J' \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} - I' \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} \right) \quad (3.25)$$

が求められる。この磁気微分方程式は $\tilde{\beta}$ を計算するために用いられる。

最後に、磁場の反変成分表示(3.8)と共変成分表示(3.17)の内積をとると

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(I + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \right) B^\theta + \left(J + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta} \right) B^\zeta \\ &= IB^\theta + JB^\zeta + \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\phi} \end{aligned} \quad (3.26)$$

となる。この式の磁気面平均をとると、先ほどと同様に可解条件より

$$\langle B^2 \rangle \mathcal{V}' = I\chi' + J\phi' \quad (3.27)$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\phi} &= B^2 - \frac{I\chi' + J\phi'}{\mathcal{J}} + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(I \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} - J \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} \right) \\ &= \left(B^2 - \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{J}} \langle B^2 \rangle \right) + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(I \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} - J \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (3.28)$$

が求められる。この磁気微分方程式は $\tilde{\phi}$ を計算するために用いられる。

これまでの議論は任意の磁気座標系で成り立つが、通常 $\tilde{\alpha} = 0$ となる角度の取り方をする磁気座標系を選ぶことが多く（もしもそうでなければ、 $\theta + \tilde{\alpha} / \phi'$ を新しい θ と変数変換すればよい）、このとき磁場は

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \nabla \rho \times \nabla (\phi' \theta - \chi' \zeta) \\ &= \nabla \zeta \times \nabla \chi + \nabla \phi \times \nabla \theta \\ &= \chi' \nabla \zeta \times \nabla \rho + \phi' \nabla \rho \times \nabla \theta \end{aligned} \quad (3.29)$$

と表現できる。したがって磁場の反変成分は

$$B^\rho = 0, \quad B^\theta = \chi' / \mathcal{J}, \quad B^\zeta = \phi' / \mathcal{J} \quad (3.30)$$

と書ける。この場合、磁力線の式 $\alpha = const.$ は $\theta = \iota \zeta + const.$ となるので、磁力線は磁気座標系における $\theta - \zeta$ 平面（磁気面）上では傾き ι の直線に見える。そこで、このように選んだ座標系の総称を SFL (straight field line) 座標系と呼ぶことがある（論文によっては SFL 座標系をとくに磁気座標系と呼ぶこともある）。ただし、磁気座標にはポロイダル角とトロイダル角の選び方という2つの自由度があるため、 $\tilde{\alpha} = 0$ という条件を付けてももう一つの自由度がある。したがって磁力線が直線に見える座標系は無限にあり、まだ座標系は確定していないことに注意する必要がある。代表的な SFL 座標系は Hamada 座標系と Boozer 座標系である。SFL 座標系ではとくに、磁気微分の記述が簡単になり、式 (3.18) は

$$\vec{B} \cdot \nabla f = \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \phi' \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f \quad (3.31)$$

となる。これを用いて、磁気微分方程式

$$\vec{B} \cdot \nabla f(\vec{r}) = g(\vec{r})$$

において $f(\rho, \theta, \zeta)$ を求める問題を考える。トーラスプラズマにおいて物理量は θ と ζ に関して周期関数であるので $\mathcal{J}g$ をフーリエ級数展開し、 $[\mathcal{J}g](\rho, \theta, \zeta) = \sum_{m,n} [\mathcal{J}g]_{mn}(\rho) \exp[i(m\theta - n\zeta)]$ のように表せば、磁気微分方程式は $f(\rho, \theta, \zeta) = \sum_{m,n} f_{mn}(\rho) \exp[i(m\theta - n\zeta)]$ に対して、

$$\begin{aligned} \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \phi' \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f &= \mathcal{J}g \\ i(m\chi' - n\phi') f_{mn} &= [\mathcal{J}g]_{mn} \\ f_{mn} &= -\frac{i[\mathcal{J}g]_{mn}}{(m\chi' - n\phi')} = -\frac{i[\mathcal{J}g]_{mn}}{\chi'(m - nq)} = \frac{i[\mathcal{J}g]_{mn}}{\phi'(n - \iota m)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

のように解くことができる。この磁気微分方程式の可解条件は $\iota = n/m$ ($q = m/n$) となる有理面において $[\mathcal{J}g]_{mn} = 0$ である。

SFL 座標系 ($\tilde{\alpha} = 0$) を考えたとしても、一般には電流は $\theta - \zeta$ 平面上で直線に乗って流れるとは限らないので θ, ζ の周期関数 $\tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta)$ が必要となる。もちろん $\tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta) = 0$ となる座標系を選ぶこともでき、このとき座標系は一意に決まってしまう。このように、磁力線も電流線も $\theta - \zeta$ 平面上で直線に見えるように選んだ磁気座標系は Hamada 座標系と呼ばれる。Hamada 座標系のヤコビアン $\mathcal{J}_{\text{Hamada}}$ は、 $\tilde{\alpha}$ も $\tilde{\beta}$ もゼロであるので、式(3.25)より

$$\mathcal{J}_{\text{Hamada}} = \mathcal{V}' \quad (3.33)$$

となり、磁気面量すなわち磁気面上で一定値となる。さらに径方向座標 ρ として \mathcal{V} を選ぶと、ヤコビアンは空間一様で 1 となるため、浜田座標系 $(\mathcal{V}, \theta, \zeta)$ は解析的計算によく使われる。この場合、磁場の反変成分も $B^\theta = \chi'$ 、 $B^\zeta = \phi'$ のように磁気面量となるばかりでなく、式(3.32)の様な計算もヤコビアンを考える必要がなくなる。このように Hamada 座標系では $\tilde{\alpha}$ や $\tilde{\beta}$ を考えなくてよいだけでなく、ヤコビアンが磁気面上で一定となるので、この座標系は解析的な手計算に適した座標系である。ただし、Hamada 座標系では $\tilde{\beta} = 0$ であるが、 $\tilde{\phi}$ は一般にゼロとはならないことに注意する必要がある。したがって、Hamada 座標系での磁場の共変成分を求めるには $\tilde{\phi}$ を計算する必要があり、磁気微分方程式(3.28)を解く必要がある。

一方、 $\tilde{\alpha} = 0$ と $\tilde{\phi} = 0$ と選び、磁場の共変表示を簡単 (B_θ と B_ζ が磁気面量、すなわち磁気面上で一定となる) にしたものは Boozer 座標系と呼ばれている。ただし Boozer 座標系では、Hamada 座標系とは逆に、 $\tilde{\beta}$ がゼロとならず、電流線は $\theta - \zeta$ 平面上で直線に見えない。Boozer 座標系のヤコビアン $\mathcal{J}_{\text{Boozer}}$ は式(3.28)より、

$$\mathcal{J}_{\text{Boozer}} = \frac{I\chi' + J\phi'}{B^2} = \frac{\langle B^2 \rangle}{B^2} \nu' \quad (3.34)$$

となり、 $1/B^2$ に比例する。Boozer 座標系はとくに粒子の案内中心軌道を表現するのに適しており、非軸対称トロースプラズマの解析では最もよく用いられている。Boozer 座標系については後述する。

トカマクのような軸対称配位では、トロイダル角 ζ を幾何学的なトロイダル角 φ と一致するように選ぶ SFL 座標系 (symmetry 座標系とか PEST 座標系と呼ばれる) が良く用いられる。実際には (ρ, θ, ζ) 座標系が右手系をなすように $\zeta = -\varphi$ と選ぶことが多い。軸対称 MHD 平衡では磁気面形状もトロイダル方向に一様なので、 $\zeta = -\varphi$ と選べば、 $\nabla\rho$ も $\nabla\theta$ も $\nabla\zeta$ と直交する ($\nabla\rho \cdot \nabla\zeta = 0$ 、 $\nabla\theta \cdot \nabla\zeta = 0$)。したがって、磁場の共変成分表示(3.17)と $\nabla\zeta$ の内積を取ることにより

$$B^\zeta = \vec{B} \cdot \nabla\zeta = J(\rho) / R^2 \quad (3.35)$$

が得られる。ここで、 $\nabla\zeta = -(1/R)\vec{e}_\varphi$ を用いた。 $\vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\zeta$ は円柱座標系におけるトロイダル方向の単位ベクトルである。円柱座標における磁場のトロイダル成分を $B_\varphi = \vec{B} \cdot \vec{e}_\varphi$ と書けば、式(3.35)より (磁気面の外側を流れる) ポロイダル電流に対応する磁気面量 $J(\rho)$ は $J(\rho) = R^2 B^\zeta = -RB_\varphi$ であることが分かる。すなわち軸対称 MHD 平衡では、 RB_φ が磁気面上で一定である。式(3.29)と(3.35)より、この座標系においてヤコビアンは

$$\mathcal{J}_{\text{symmetry}} = \frac{\phi'}{B^\zeta} = \frac{\phi' R^2}{J(\rho)} \quad (3.36)$$

となり R^2 に比例することが分かる。トカマクでは径方向座標としてポロイダル磁束に対応する χ を用いて表すことが多く、この場合、式(3.36)のヤコビアンは

$$\mathcal{J}_{\text{symmetry}} = \frac{q(\chi)R^2}{J(\chi)} \quad (3.37)$$

となる。

磁気座標系のまとめ (ρ, θ, ζ) 座標系... SFL座標系では $\tilde{\alpha} = 0$ 、プライムは ρ 微分

微分演算子

$$\begin{aligned}\nabla f &= \nabla_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \nabla_\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \nabla_\zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta} \\ \nabla \cdot \vec{A} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \rho} (\mathcal{J} A^\rho) + \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathcal{J} A^\theta) + \frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\mathcal{J} A^\zeta) \\ \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\frac{\partial A_\zeta}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \zeta} \right) (\mathcal{J} \nabla \theta \times \nabla \zeta) \\ &\quad + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial \zeta} - \frac{\partial A_\zeta}{\partial \rho} \right) (\mathcal{J} \nabla \zeta \times \nabla \rho) + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) (\mathcal{J} \nabla \rho \times \nabla \theta)\end{aligned}$$

磁場ベクトル

反変 (contravariant) 成分表示 :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \nabla_\rho \times \nabla (\phi' \theta - \chi' \zeta + \tilde{\alpha}) \\ &= \nabla_\zeta \times \nabla \chi + \nabla \phi \times \nabla \theta + \nabla_\rho \times \nabla \tilde{\alpha} \\ &= \left(\chi' - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} \right) \nabla_\zeta \times \nabla \rho + \left(\phi' + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} \right) \nabla_\rho \times \nabla \theta \\ B^\rho &= 0, \quad B^\theta = \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\chi' - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} \right), \quad B^\zeta = \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\phi' + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} \right)\end{aligned}$$

共変 (covariant) 成分表示 :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta) \nabla \rho + I(\rho) \nabla \theta + J(\rho) \nabla \zeta + \nabla \tilde{\phi} \\ &= \left(\tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \rho} \right) \nabla \rho + \left(I(\rho) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \right) \nabla \theta + \left(J(\rho) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta} \right) \nabla \zeta \\ B_\rho &= \tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \rho}, \quad B_\theta = I(\rho) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta}, \quad B_\zeta = J(\rho) + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta}\end{aligned}$$

ヤコビアン

$$\mathcal{J} = (\nabla_\rho \times \nabla \theta \cdot \nabla \zeta)^{-1}$$

磁束

$$\begin{aligned}\Phi_{tor} &\equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_t = \frac{1}{2\pi} \int (\vec{B} \cdot \nabla \zeta) dV = 2\pi \phi \\ \Phi_{pol} &\equiv \int \vec{B} \cdot d\vec{S}_p = \frac{1}{2\pi} \int (\vec{B} \cdot \nabla \theta) dV = 2\pi \chi\end{aligned}$$

磁気面平均

$$\langle f \rangle \equiv \frac{\frac{d}{d\rho} \int f dV}{\frac{d}{d\rho} \int dV} = \frac{\oint f \mathcal{J} d\theta d\zeta}{\oint \mathcal{J} d\theta d\zeta} = \frac{1}{V'} \oint f \mathcal{J} d\theta d\zeta$$

磁気微分

$$\vec{B} \cdot \nabla f = \left(B^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + B^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f = \frac{1}{\mathcal{J}} \left((\chi' - \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\phi' + \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f$$

SFL 座標系では

$$\vec{B} \cdot \nabla f = \frac{1}{\mathcal{J}} \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \phi' \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f$$

回転変換と安全係数

$$\iota(\rho) = \frac{\chi'(\rho)}{\phi'(\rho)} = \frac{d\chi}{d\phi}$$

$$q(\rho) = \iota(\rho)^{-1} = \frac{\phi'(\rho)}{\chi'(\rho)} = \frac{d\phi}{d\chi}$$

電流密度ベクトル

反変 (contravariant) 成分表示 :

$$\begin{aligned} \mu_0 \vec{j} &= \nabla \rho \times \nabla (I'(\rho)\theta + J'(\rho)\zeta - \tilde{\beta}(\rho, \theta, \zeta)) \\ &= -\nabla \zeta \times \nabla J + \nabla I \times \nabla \theta - \nabla \rho \times \nabla \tilde{\beta} \\ &= -\left(J' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \zeta} \right) \nabla \zeta \times \nabla \rho + \left(I' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \theta} \right) \nabla \rho \times \nabla \theta \end{aligned}$$

$$\mu_0 j^\rho = 0, \quad \mu_0 j^\theta = -\frac{1}{\mathcal{J}} \left(J' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \zeta} \right), \quad \mu_0 j^\zeta = \frac{1}{\mathcal{J}} \left(I' - \frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial \theta} \right)$$

電流

$$\mu_0 I_{tor} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_V (\vec{j} \cdot \nabla \zeta) dV = 2\pi \langle B_\theta \rangle = 2\pi I$$

$$\mu_0 I_{pol} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{V_{out}} (\vec{j} \cdot \nabla \theta) dV = 2\pi \langle B_\zeta \rangle = 2\pi J$$

計量テンソル

$$(R_\rho = \frac{\partial R}{\partial \rho}, R_\theta = \frac{\partial R}{\partial \theta}, R_\zeta = \frac{\partial R}{\partial \zeta} \text{ などと定義する。})$$

$$g_{ij} = R_i R_j + Z_i Z_j + R^2 \varphi_i \varphi_j \quad i, j = \rho, \theta, \zeta$$

$$\begin{aligned}
g^{\rho\theta} &= \nabla\rho \cdot \nabla\theta = (g_{\rho\zeta}g_{\zeta\theta} - g_{\rho\theta}g_{\zeta\zeta})/\mathcal{J}^2 \\
g^{\theta\zeta} &= \nabla\theta \cdot \nabla\zeta = (g_{\rho\theta}g_{\rho\zeta} - g_{\rho\rho}g_{\theta\zeta})/\mathcal{J}^2 \\
g^{\zeta\rho} &= \nabla\zeta \cdot \nabla\theta = (g_{\zeta\theta}g_{\theta\rho} - g_{\theta\theta}g_{\rho\zeta})/\mathcal{J}^2 \\
g^{\rho\rho} &= |\nabla\rho|^2 = (g_{\theta\theta}g_{\zeta\zeta} - g_{\theta\zeta}g_{\zeta\theta})/\mathcal{J}^2 \\
g^{\theta\theta} &= |\nabla\theta|^2 = (g_{\zeta\zeta}g_{\rho\rho} - g_{\rho\zeta}g_{\zeta\rho})/\mathcal{J}^2 \\
g^{\zeta\zeta} &= |\nabla\zeta|^2 = (g_{\theta\theta}g_{\rho\rho} - g_{\rho\theta}g_{\theta\rho})/\mathcal{J}^2
\end{aligned}$$

磁場ベクトルの反変成分から共変成分への変換

$$\begin{aligned}
B_\rho &= g_{\rho\theta}B^\theta + g_{\rho\zeta}B^\zeta \\
B_\theta &= g_{\theta\theta}B^\theta + g_{\theta\zeta}B^\zeta \\
B_\zeta &= g_{\zeta\theta}B^\theta + g_{\zeta\zeta}B^\zeta
\end{aligned}$$

微分線素 (u_i 曲線に沿った微分線素)

$(u_1, u_2, u_3) = (\rho, \theta, \zeta)$ とする

$$d\vec{s}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} du_i = \vec{e}_i du_i = (\mathcal{J} \nabla u_j \times \nabla u_k) du_i \quad (i, j, k \text{ は循環的並び})$$

$$(\text{例}) \quad \vec{B} \text{ の } \zeta \text{ 方向の線積分} \quad \int \vec{B} \cdot d\vec{s}_\zeta = \int \vec{B} \cdot (\mathcal{J} \nabla \rho \times \nabla \theta) d\zeta = \int B_\zeta d\zeta$$

微分面積素 (u_i = 一定面の法線方向ベクトルを持つ面素)

$$\begin{aligned}
d\vec{S}_i &= \vec{e}_j \times \vec{e}_k du_j du_k \\
&= \mathcal{J} \nabla u_i du_j du_k \quad (i, j, k \text{ は循環的並び})
\end{aligned}$$

微分体積素・体積

$$\begin{aligned}
dV &= \mathcal{J} d\rho d\theta d\zeta \\
V &= \iiint \mathcal{J} d\rho d\theta d\zeta \equiv (2\pi)^2 \mathcal{V}
\end{aligned}$$

局所平衡

$$\begin{aligned}
\mu_0 p' &= \mathcal{J} (j^\theta B^\zeta - j^\zeta B^\theta) \\
&= \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} - (J' B^\zeta + I' B^\theta)
\end{aligned}$$

磁気面平均された平衡力バランス

$$\begin{aligned}
\mu_0 p' &= -J' \langle B^\zeta \rangle - I' \langle B^\theta \rangle \\
\mu_0 p' \mathcal{V}' &= -(J' \phi' + I' \chi')
\end{aligned}$$

局所平衡を満たす $\tilde{\beta}$ に対する磁気微分方程式

$$\vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} = -\mu_0 p' \left(\frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{J}} - 1 \right) + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(J' \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} - I' \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} \right)$$

$\langle B^2 \rangle$ と $\tilde{\phi}$

$$\begin{aligned} B^2 &= \left(I + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \theta} \right) B^\theta + \left(J + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta} \right) B^\zeta \\ &= IB^\theta + JB^\zeta + \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\phi} \end{aligned}$$

$$\langle B^2 \rangle \mathcal{V}' = I\chi' + J\phi'$$

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\phi} &= B^2 - \frac{I\chi' + J\phi'}{\mathcal{J}} + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(I \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} - J \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} \right) \\ &= \left(B^2 - \frac{\mathcal{V}'}{\mathcal{J}} \langle B^2 \rangle \right) + \frac{1}{\mathcal{J}} \left(I \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \zeta} - J \frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

4. VMEC コードにおける磁気座標系

4.1 VMEC コードによる 3次元 MHD 平衡計算

ここでは最初に VMEC コードにおける平衡計算の原理を示す。磁気座標を用いて磁場を(3.8)のように記述することは、入れ子状の磁気面 ρ の存在を暗黙のうちに仮定したことに対応している。このような場合、MHD 平衡はエネルギー原理の観点から変分法を用いて求めることができる。プラズマ境界の形状が固定境界条件で決められているとすると、MHD 平衡はポテンシャルエネルギーの第一変分

$$\delta W_p^{(1)} = \int \vec{\xi} \cdot \vec{F} dV \quad (4.1)$$

が任意の摂動 $\vec{\xi}$ に対してゼロの状態である。ここで \vec{F} は MHD 力、 $\nabla p - \vec{j} \times \vec{B}$ を表わし $\vec{\xi}$ は平衡磁気面の形状 $\vec{r}(\rho, \theta, \zeta)$ からの変位 $\delta \vec{r}$ である。因みに、式(4.1)の Euler-Lagrange 方程式は $\vec{F} = 0$ であり、式(2.1)と同じである。VMEC では、 $\delta W_p^{(1)} = 0$ を得るため、すなわちポテンシャルエネルギー W_p の極小値を得るため、人工的な時間 t を導入し式(4.1)を、

$$\frac{dW_p}{dt} = \int \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \cdot \vec{F} dV \quad (4.2)$$

と書く。これより、 W_p が単調減少するための降下経路 (descent path) は任意の正の実定数 C を用いて

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -C \vec{F} \quad (4.3)$$

となる。すなわちこのような経路を考え、式(4.3)の時間発展を解けば、(4.2)より

$$\frac{dW_p}{dt} = -C \int |\vec{F}|^2 dV \leq 0 \quad (4.4)$$

となり、 W_p は単調減少し、極小値 $dW_p / dt \rightarrow 0$ に達することが分かる。また式(4.4)より $dW_p / dt = 0$ となるのは $\vec{F} = 0$ のときでだけであることに注意せよ。このとき得られる $\vec{r}(\rho, \theta, \zeta)$ が平衡磁気面の形状を表わす。

以上のように変分原理に基づき平衡磁気面の形状 $\vec{r}(\rho, \theta, \zeta)$ を計算する方法は、G-S 方程式がポロイダル磁束を \vec{r} の関数として計算するのは逆の考え方であるので逆解法 (inverse solver) とも呼ばれる。最初に変分原理に基づく三次元逆解法プログラム BETA コードを開発したのは Garabedian らのグループであった。Hirshman らによる VMEC コードは、BETA が三次元有限差分を用いているのに対し、磁気面上の角変数に関して Fourier 展開を用いる spectral 法を採用している。

非軸対称系では厳密には存在しないと考えられる入れ子状の磁気面の存在を仮定 (磁気座標を用いている) する逆解法のプログラムが、三次元MHD平衡解を求めることができるのは、変分原理の性質をうまく利用しているからである。すなわち変分法で求めているのはいわゆる「弱解 (weak solution)」であり、与えられた拘束条件 (入れ子状の磁気面の存在) のもとで最も平衡解に近い解を求めている。従って実際の計算結果では、 \vec{F} の

磁気面平均が非常にゼロに近い場合でも、磁気面上の局所的な位置では必ずしも $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$ を満たしているとは限らない。このことが最も顕著なのは、低次の有理面においてである。この有理面において、入れ子状の磁気面の存在を仮定する事がどのような影響を及ぼすかを見るため、Boozer 座標系においてプラズマ電流(3.12)を評価してみる。式(3.12)において、 I' や J' は磁気面上で一定値を取る磁気面量であるので、磁気面上での電流分布を決めるのは $\tilde{\beta}$ である。仮に局所平衡 $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$ が成り立つと仮定すれば、式(3.25)より Boozer 座標系を含む SFL 座標系では

$$\vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} = -p' \left(\frac{V'}{J} - 1 \right)$$

が成り立つ。この磁気微分方程式は式(3.32)のように解くことができ、有理面上でヤコビアンが可解条件を満足しているか $p' = 0$ でなければ $\tilde{\beta}$ の共鳴モードは発散してしまう。有理面上での $\tilde{\beta}$ の発散は、物理的には、共鳴有理面上で磁気島（入れ子状の磁気面とならず、島のような構造を持つこと。有理面と密接な関わりを持つ）を完全に無視したため共鳴プラズマ電流が流れたことに対応している。このことは、VMEC の平衡解が厳密な MHD 平衡を満足するとして安定性などの解析を行う時に問題となる場合がある。実際には、VMEC コードでは有限のフーリエモード数を用いているので非常に次数の高い有理面では問題ないが、低次有理面ではとくに問題となりやすい。

さらに逆解析コードでは基本的にプラズマ境界の形状を与えて計算を行う（固定境界平衡）が、どこがプラズマ境界かを矛盾なく求めることは容易ではない。VMEC においては、外部（コイル）磁場やプラズマの全トロイダル磁束などを与えた上で、プラズマ境界形状を求める自由境界平衡計算も可能であるが、矛盾のない様に自由境界平衡を求めるには工夫も必要で、これに関して多くの研究があるが、ここでは割愛する。

註 1：上記の共鳴電流の議論では、Boozer 座標系を考えたが、Hamada 座標系では $\tilde{\beta} = 0$ であるので上の結果と矛盾しているように見える。しかし、Hamada 座標系では $\tilde{\beta} = 0$ とおいたしわ寄せが、座標系の取り方に来て、磁場の共変成分、式(3.16)の $\tilde{\phi}$ を求める式(3.28)の計算で共鳴発散が生じる。その結果、磁場に平行な電流に対応する $\vec{j} \cdot \vec{B}$ はいずれにせよ発散してしまう。

註 2：また、共鳴平行電流の議論を厳密に考慮すれば、あらゆる有理面で共鳴が起こり、非軸対称トーラスプラズマでは厳密には（数学的には）入れ子状の磁気面を持つ MHD 平衡はないと結論づけられるかもしれない。しかし、これは物理的な近似を行って得られた MHD 理論を数学的に厳密に適用した結果であり、有限ラーマ半径効果といった運動論的效果のように、非 MHD 効果を考慮すれば、十分小さな幅の磁気島を無視している VMEC で用いた弱解としての平衡解は、実際上悪くない近似であると考えられる（KAM 理論や近可積分系の議論ともつながる）。実際、磁力線追跡やヘリカル系プラズマにおける実験において、VMEC で得られた非軸対称平衡解は多くの場合有用であることが知られている。

4.2 VMEC における磁気座標系

ここからは、VMEC で用いられる磁気座標系と、実用上有用な関係式を羅列する。導出は 3 章の議論を用いれば容易にできるはずである。ただし、VMEC を利用したとき、最初に躓きとなりやすい右手系、左手系の議論をしておく。

VMEC における磁気座標系では、径座標を s (磁気軸で 0、プラズマ境界で 1) として、円柱座標系のトロイダル角 φ がトロイダル角として用いられており ($\zeta = \varphi$)、磁気座標系 (s, θ, ζ) はヤコビアンが負となる左手系が標準として採用されている (VMEC の内部的には、ポロイダル角 θ を u 、トロイダル角 ζ を v と表現することも多い。とくに Max Planck IPP ではよくこの表現が使われている)。図 6 に $B^\zeta > 0$ 、 $B^\theta > 0$ の場合の左手系磁気座標と磁場および電流の向きを示す。もちろん、VMEC 自身は右手系 (図 7) でも平衡計算に何の支障も無いが、VMEC で得られた平衡を用いる各種解析コードにおいて、左手系を前提としているものもあるので、できれば左手系で計算することを勧める。左手系で得られた結果を右手系に変換して解析に用いたい場合、トロイダル方向を反転する方法も考えられるが、一番簡単なのはポロイダル方向の反転であろう。

ここでは、左手系も右手系も扱えるようにパラメータ σ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \sigma = +1 & \quad ; \text{Right-handed} \\ \sigma = -1 & \quad ; \text{Left-handed} \end{aligned}$$

また、VMEC ではヤコビアンとして `gsqrt` という変数名が用いられているので、以降はヤコビアンを \sqrt{g}

$$\sqrt{g} = (\nabla s \times \nabla \theta \cdot \nabla \zeta)^{-1}$$

で表すが、これは表記上だけの問題で、左手系では \sqrt{g} は負である。すなわち、

$$\sigma \equiv \sqrt{g} / |\sqrt{g}|$$

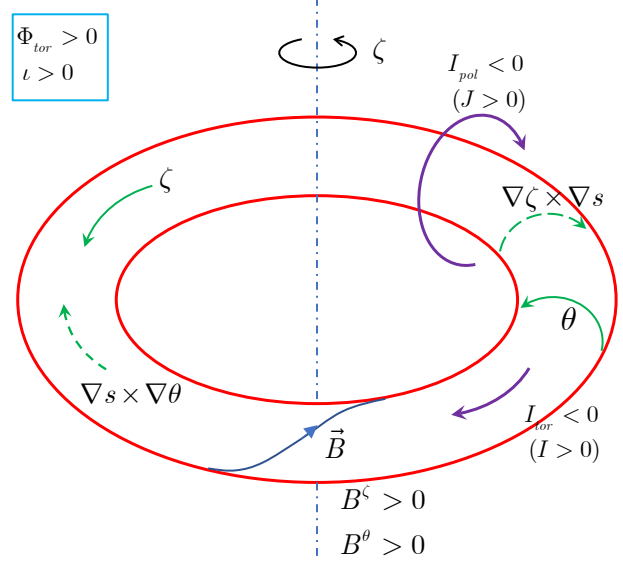


図 6 VMEC で標準的に用いられる左手系磁気座標 ($\sigma = -1$)

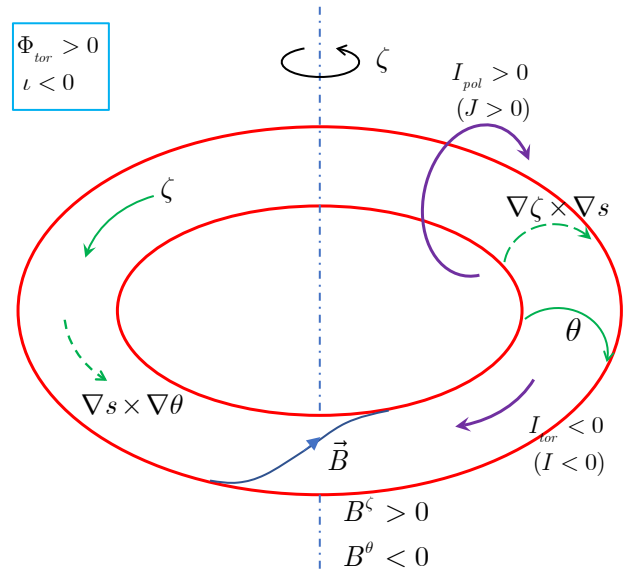


図 7 右手系磁気座標 ($\sigma = +1$)

が σ の定義とすることもできる。

VMEC の径座標 s はデフォルトでは規格化トロイダル磁束 $s \equiv \Phi_{tor} / \Phi_{tor}^{edge}$ であるが、最近の VMEC では `aphi` という入力パラメータが導入されており、これを用いると規格化トロイダル磁束と s の関係を

$$\Phi_{tor}(s) / \Phi_{tor}^{edge} = a_1^\phi s + a_2^\phi s^2 + \dots + a_{10}^\phi s^{10}$$

のように変更することができる。デフォルトは $a_1^\phi = 1$, $a_2^\phi \sim a_{10}^\phi = 0$ に対応している。これを用いると、必要な領域に `mesh accumulation` を行うことも可能である。ただし、 $a_1^\phi = 0$, $a_2^\phi = 1$, $a_3^\phi \sim a_{10}^\phi = 0$ とすれば $s \equiv \sqrt{\Phi_{tor} / \Phi_{tor}^{edge}}$ とすることができるはずだが、磁気軸に近づくにつれ $\phi' \rightarrow 0$ となり、磁場の反変成分がゼロに近づくため、うまく収束しないようである。また、`aphi` オプションを用いた場合でも、`mass` (圧力) や回転変換、電流などの分布は規格化トロイダル磁束の関数で与える。

さらに、入力パラメータとして論理型変数 `lrfp` を`.true.`とすれば、トカマクにおける平衡計算で通常用いられているように規格化ポロイダル磁束 $\Phi_{pol} / \Phi_{pol}^{edge}$ を s として用いることができる。この場合はまだ `aphi` オプションに対応するオプションはないようである。このとき、`mass` (圧力) や回転変換、電流などの分布は規格化ポロイダル磁束の関数で与える。

VMEC における磁場の Clebsch 表現は

$$\vec{B} = \nabla s \times \nabla[\phi'\{\theta + \lambda(s, \theta, \zeta)\} - \chi'\zeta]$$

のようになっている (註: 最近の VMEC 内部の λ の定義は、初期のころの定義に戻って $\vec{B} = \nabla s \times \nabla[\phi'\theta - \chi'\zeta + \lambda(s, \theta, \zeta)]$ となっているようだが、テキスト版の `wout` ファイルに出力される λ は"old-style format"と整合するため上記の式に合わせている。ただし、いくつかのバージョンで混乱が見られるようなので注意)。VMEC では `spectral` 法を用いているので、磁気面形状($R(s, \theta, \zeta), Z(s, \theta, \zeta)$)など様々な物理量は θ, ζ に関する Fourier 級数として表現されている。しかし、ポロイダル角 θ の選び方によっては十分な精度を得るために必要な Fourier モードの数が多くなってしまふ恐れがある。そこで VMEC では、SFL 座標系を用いることはせず、磁気面形状を表現する Fourier モードの数が最小になるよう、磁気面形状($R(s, \theta, \zeta), Z(s, \theta, \zeta)$)と同時に θ, ζ の周期関数 $\lambda(s, \theta, \zeta)$ も降下法で求めている。すなわち、VMEC では $R(s, \theta, \zeta)$ 、 $Z(s, \theta, \zeta)$ および $\lambda(s, \theta, \zeta)$ を解として求めている。圧力分布などの入力条件と $R(s, \theta, \zeta)$ 、 $Z(s, \theta, \zeta)$ および $\lambda(s, \theta, \zeta)$ が分かれば、全ての平衡量はこれらから計算することができる。以下、重要な平衡量の表現を示すが、基本的には3章の径方向座標 ρ を s と書き、トロイダル角 ζ を幾何学的な角度 φ とし、 $\tilde{\alpha}$ を $\phi'\lambda$ と変更したものである。また、左手系座標にも対応した記述とする。

VMEC における磁気座標のまとめ

磁場ベクトル

反変 (contravariant) 成分表示 :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \sqrt{g}B^\theta \nabla\zeta \times \nabla s + \sqrt{g}B^\zeta \nabla s \times \nabla\theta \\ &= \left(\chi' - \phi' \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta} \right) \nabla\zeta \times \nabla s + \phi' \left(1 + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right) \nabla s \times \nabla\theta \\ &= \phi' \left(\iota - \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta} \right) \nabla\zeta \times \nabla s + \phi' \left(1 + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right) \nabla s \times \nabla\theta \\ B^\theta &= \frac{\phi'}{\sqrt{g}} \left(\iota - \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\chi' - \phi' \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta} \right), \quad B^\zeta = \frac{\phi'}{\sqrt{g}} \left(1 + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\phi' + \phi' \frac{\partial\lambda}{\partial\theta} \right)\end{aligned}$$

共変 (covariant) 成分表示 :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B_s \nabla s + B_\theta \nabla\theta + B_\zeta \nabla\zeta \\ &= \left(\tilde{\beta} + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial s} \right) \nabla s + \left(I + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\theta} \right) \nabla\theta + \left(J + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\zeta} \right) \nabla\zeta \\ B_s &= \left(\tilde{\beta} + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial s} \right), \quad B_\theta = \left(I + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\theta} \right), \quad B_\zeta = \left(J + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\zeta} \right)\end{aligned}$$

註) VMEC 内ではこの関係を用いて共変成分を計算しているわけではなく、後述の計量テンソルを用いた評価を用いている。

電流密度ベクトル

反変 (contravariant) 成分表示 :

$$\begin{aligned}\vec{\mu}_0 \vec{j} &= \left(\frac{\partial B_s}{\partial\zeta} - \frac{\partial B_\zeta}{\partial s} \right) \nabla\zeta \times \nabla s + \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial\theta} \right) \nabla s \times \nabla\theta \\ \mu_0 j^\theta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_s}{\partial\zeta} - \frac{\partial B_\zeta}{\partial s} \right) && \left(= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(-J' + \frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\zeta} \right) \right) \\ \mu_0 j^\zeta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial B_\theta}{\partial s} - \frac{\partial B_s}{\partial\theta} \right) && \left(= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(I' - \frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\theta} \right) \right)\end{aligned}$$

註) VMEC では後述の計量テンソルを用いて評価した磁場の共変成分を用いて評価 ($\tilde{\beta}$ を用いた評価ではない)

ヤコビアン

$$\sqrt{g} = (\nabla s \times \nabla\theta \cdot \nabla\zeta)^{-1} = R \left(\frac{\partial R}{\partial\theta} \frac{\partial Z}{\partial s} - \frac{\partial R}{\partial s} \frac{\partial Z}{\partial\theta} \right)$$

計量テンソル

$(R_s = \frac{\partial R}{\partial s}, R_\theta = \frac{\partial R}{\partial \theta}, R_\zeta = \frac{\partial R}{\partial \zeta})$ などと定義する。VMEC では $\varphi = \zeta$)

$$g_{ij} = R_i R_j + Z_i Z_j + R^2 \varphi_i \varphi_j \quad i, j = s, \theta, \zeta$$

(VMEC では $\varphi_s = \varphi_\theta = 0, \varphi_\zeta = 1$)

$$g^{s\theta} = \nabla s \cdot \nabla \theta = (g_{s\zeta} g_{\zeta\theta} - g_{s\theta} g_{\zeta\zeta}) / (\sqrt{g})^2$$

$$g^{\theta\zeta} = \nabla \theta \cdot \nabla \zeta = (g_{s\theta} g_{s\zeta} - g_{ss} g_{\theta\zeta}) / (\sqrt{g})^2$$

$$g^{\zeta s} = \nabla \zeta \cdot \nabla \theta = (g_{\zeta\theta} g_{\theta s} - g_{\theta\theta} g_{s\zeta}) / (\sqrt{g})^2$$

$$g^{ss} = |\nabla s|^2 = (g_{\theta\theta} g_{\zeta\zeta} - g_{\theta\zeta} g_{\zeta\theta}) / (\sqrt{g})^2$$

$$g^{\theta\theta} = |\nabla \theta|^2 = (g_{\zeta\zeta} g_{ss} - g_{s\zeta} g_{\zeta s}) / (\sqrt{g})^2$$

$$g^{\zeta\zeta} = |\nabla \zeta|^2 = (g_{\theta\theta} g_{ss} - g_{s\theta} g_{\theta s}) / (\sqrt{g})^2$$

計量テンソルを用いた磁場ベクトルの共変成分

$$B_s = g_{s\theta} B^\theta + g_{s\zeta} B^\zeta$$

$$B_\theta = g_{\theta\theta} B^\theta + g_{\theta\zeta} B^\zeta$$

$$B_\zeta = g_{\zeta\theta} B^\theta + g_{\zeta\zeta} B^\zeta$$

註) 4. 1 で述べた局所平衡の観点からは要注意。VMEC 内ではこの関係を用いている。

微分線素 (u_i 曲線に沿った微分線素)

$(u_1, u_2, u_3) = (s, \theta, \zeta)$ とする

$$d\vec{s}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} du_i = \vec{e}_i du_i = (\sqrt{g} \nabla u_j \times \nabla u_k) du_i \quad (i, j, k \text{ は循環的並び})$$

$$\text{(例) } \vec{B} \text{ の } \zeta \text{ 方向の線積分} \quad \int \vec{B} \cdot d\vec{s}_\zeta = \int \vec{B} \cdot (\sqrt{g} \nabla s \times \nabla \theta) d\zeta = \int B_\zeta d\zeta$$

微分面積素 (u_i = 一定面の法線方向ベクトルを持つ面素)

$$\begin{aligned} d\vec{S}_i &= \sigma \vec{e}_j \times \vec{e}_k du_j du_k \\ &= \sigma \sqrt{g} \nabla u_i du_j du_k \end{aligned} \quad (i, j, k \text{ は循環的並び})$$

(例) ポロイダル断面積

$$S_\zeta = \iint \vec{n}_\zeta \cdot d\vec{S}_\zeta = \iint \frac{\nabla \zeta}{|\nabla \zeta|} \cdot d\vec{S}_\zeta = \sigma \iint \sqrt{g} |\nabla \zeta| ds d\theta = \sigma \iint \frac{\sqrt{g}}{R} ds d\theta$$

微分体積素・体積

$$dV = \sigma \sqrt{g} ds d\theta d\zeta$$

$$V = \iiint \sqrt{g} ds d\theta d\zeta = (2\pi)^2 \sigma \int \langle \sqrt{g} \rangle_{\theta\zeta} ds \equiv (2\pi)^2 \mathcal{V}$$

ここで θ - ζ 平均（磁気面平均ではない）を

$$\langle \cdot \rangle_{\theta\zeta} = \frac{\iint \cdot d\theta d\zeta}{\iint d\theta d\zeta} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \cdot d\theta d\zeta$$

と定義した。VMEC の volume はしばしば、 $\mathcal{V} = V / (2\pi)^2$ を示しているのに注意
 (wout ファイルの vp は $d\mathcal{V}/ds$ である)。

$$V' = \frac{dV}{ds} = (2\pi)^2 \sigma \langle \sqrt{g} \rangle_{\theta\zeta}$$

$$\mathcal{V}' = \frac{d\mathcal{V}}{ds} = \sigma \langle \sqrt{g} \rangle_{\theta\zeta}$$

磁気面平均

$$\langle f \rangle \equiv \frac{\frac{d}{ds} \int f dV}{\frac{d}{ds} \int dV} = \frac{\oint f \sqrt{g} d\theta d\zeta}{\oint \sqrt{g} d\theta d\zeta} = \frac{\sigma}{V'} \oint f \sqrt{g} d\theta d\zeta$$

磁気微分

$$\vec{B} \cdot \nabla f = \left(B^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + B^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f = \frac{1}{\sqrt{g}} \left((\chi' - \phi' \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}) \frac{\partial}{\partial \theta} + (\phi' + \phi' \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) f$$

磁束・電流

$$\Phi_{tor} \equiv \int_{S_\zeta} \vec{B} \cdot d\vec{S}_\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_V (\vec{B} \cdot \nabla \zeta) dV = \frac{\sigma}{2\pi} \iiint \phi' \left(1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) ds d\theta d\zeta = 2\pi \sigma \phi$$

$$\Phi_{pol} \equiv \int_{S_\theta} \vec{B} \cdot d\vec{S}_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_V (\vec{B} \cdot \nabla \theta) dV = \frac{\sigma}{2\pi} \iiint \left(\chi' - \phi' \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right) ds d\theta d\zeta = 2\pi \sigma \chi$$

$$\mu_0 I_{tor} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_V (\vec{j} \cdot \nabla \zeta) dV = 2\pi \sigma \langle B_\theta \rangle = 2\pi \sigma I$$

$$\mu_0 I_{pol} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{V_{out}} (\vec{j} \cdot \nabla \theta) dV = 2\pi \sigma \langle B_\zeta \rangle = 2\pi \sigma J$$

註 1) 左手系で $B^\zeta > 0$ ($\Phi_{tor} > 0$) の時、 ϕ, ϕ' は負であることを注意。

註 2) VMEC では $I(s) = \langle B_\theta(s, \theta, \zeta) \rangle_{\theta\zeta}$, $J(s) = \langle B_\zeta(s, \theta, \zeta) \rangle_{\theta\zeta}$ を用いている。

註3) J は Boozer 座標系でよく用いられている G である。

I_{TFcoil} をトロイダルコイルやヘリカルコイルに流す総ポロイダル電流量 (すべてのコイルに流れるポロイダル電流の和、アンペア - ターン) とすれば

$$G(s=1) = J(s=1) = \frac{\sigma}{2\pi} \mu_0 I_{TFcoil} [A] = 0.2\sigma I_{TFcoil} [MA] \text{ となり、実コイル電流}$$

との調整が可。

局所平衡

$$\begin{aligned} \mu_0 p' &= \sqrt{g} (j^\theta B^\zeta - j^\zeta B^\theta) \\ &= \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} - (J' B^\zeta + I' B^\theta) \end{aligned}$$

磁気面平均された平衡力バラン

$$\begin{aligned} \mu_0 p' &= -J' \langle B^\zeta \rangle - I' \langle B^\theta \rangle \\ \mu_0 p' \mathcal{V}' &= -\sigma (J' \phi' + I' \chi') \end{aligned}$$

局所平衡を満たす $\tilde{\beta}$ に対する磁気微分方程式 (VMEC ではほとんど使わない)

$$\vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} = -\mu_0 p' \left(\frac{\mathcal{V}'}{\sqrt{g}} - 1 \right) + \frac{\phi'}{\sqrt{g}} \left(J' \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - I' \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right)$$

$\langle B^2 \rangle$ と $\tilde{\phi}$

$$\begin{aligned} B^2 &= IB^\theta + JB^\zeta + \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\phi} \\ \langle B^2 \rangle &= I \langle B^\theta \rangle + J \langle B^\zeta \rangle = \frac{\sigma}{\mathcal{V}'} (I \chi' + J \phi') \\ \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\phi} &= B^2 - (IB^\theta + JB^\zeta) \end{aligned}$$

トロイダル電流と回転変換

$$\begin{aligned} \mu_0 I_{tor} &= 2\pi\sigma I \\ &= 2\pi\sigma \langle B_\theta \rangle_{\theta\zeta} \\ &= 2\pi\sigma \langle g_{\theta\theta} B^\theta + g_{\theta\zeta} B^\zeta \rangle_{\theta\zeta} \\ &= \Phi_{tor}' (S_{11} \iota + S_{12}) \\ &= S_{11} \Phi_{pol}' + S_{12} \Phi_{tor}' \\ I &= \phi' (S_{11} \iota + S_{12}) = S_{11} \chi' + S_{12} \phi' \\ S_{11} &= \left\langle \frac{g_{\theta\theta}}{\sqrt{g}} \right\rangle_{\theta\zeta}, \quad S_{12} = \left\langle \frac{g_{\theta\zeta} (1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta}) - g_{\theta\theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta}}{\sqrt{g}} \right\rangle_{\theta\zeta} \\ \iota &= \frac{1}{S_{11}} \left(\frac{I}{\phi'} - S_{12} \right) \end{aligned}$$

註 1) 電流分布を入力とした場合、VMEC 内ではこの式より l や χ' を計算している。

註 2) 軸対称配位では、 S_{12} はゼロである。

ポロイダル電流と回転変換

$$\begin{aligned}
 \mu_0 I_{pol} &= 2\pi\sigma J \\
 &= 2\pi\sigma \langle B_\zeta \rangle_{\theta\zeta} \\
 &= 2\pi\sigma \langle g_{\zeta\theta} B^\theta + g_{\zeta\zeta} B^\zeta \rangle_{\theta\zeta} \\
 &= \Phi'_{tor} (S_{21}l + S_{22}) \\
 &= S_{21}\Phi'_{pol} + S_{22}\Phi'_{tor} \\
 S_{21} &= \left\langle \frac{g_{\zeta\theta}}{\sqrt{g}} \right\rangle_{\theta\zeta}, \quad S_{22} = \left\langle \frac{g_{\zeta\zeta}(1 + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta}) - g_{\zeta\theta} \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}}{\sqrt{g}} \right\rangle_{\theta\zeta}
 \end{aligned}$$

註) 軸対称配位では S_{21} はゼロなので、ポロイダル電流と回転変換は結びつかない。

電流と磁束の関係 (上記 2 項目のまとめ)

$$\mu_0 \begin{pmatrix} I_{tor} \\ I_{pol} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi'_{tor} \\ \Phi'_{pol} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S} \equiv \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \text{ はサスセプタンス行列}$$

平行電流

$$\begin{aligned}
 \vec{j} \cdot \vec{B} &= j^\theta B_\theta + j^\zeta B_\zeta \\
 \langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle &= \frac{\sigma}{\mu_0 \mathcal{V}'} \left\langle \left(I + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\theta} \right) \left(-J' + \frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\zeta} \right) + \left(J + \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\zeta} \right) \left(I' - \frac{\partial\tilde{\beta}}{\partial\theta} \right) \right\rangle_{\theta\zeta} \\
 &= \frac{\sigma}{\mu_0 \mathcal{V}'} (-IJ' + I'J)
 \end{aligned}$$

MHD 平衡が成り立っているとき、磁気面平均された平衡力バランスの式と $\langle B^2 \rangle$ に対する式から J, J' を消去すると

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle = \frac{1}{\mu_0 \phi'} \left(\langle B^2 \rangle I' + \mu_0 p' I \right)$$

平行電流と回転変換 (上記の式を回転変換で書くと)

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle = \frac{\sigma \phi'^2}{\mu_0 \mathcal{V}'} (S_{21}l + S_{22})^2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{S_{11}l + S_{12}}{S_{21}l + S_{22}} \right)$$

平衡力バランスの式を用いると

$$\langle \vec{j} \cdot \vec{B} \rangle = \frac{1}{\mu_0 \phi'} \left[\langle B^2 \rangle \frac{\partial}{\partial s} \{ \phi' (S_{11}l + S_{12}) \} + \mu_0 p' \phi' (S_{11}l + S_{12}) \right]$$

5. Boozer 座標系

5.1 Boozer 座標系と変換プログラム

Boozer 座標系は SFL 座標系の一種であり、3 章における $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\phi}$ をゼロとした座標系である。これ以降、 (s, θ, ζ) は Boozer 座標系だとすると、磁場の表現は

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \sqrt{g} B^\theta \nabla \zeta \times \nabla s + \sqrt{g} B^\zeta \nabla s \times \nabla \theta \\ &= \chi' \nabla \zeta \times \nabla s + \phi' \nabla s \times \nabla \theta \\ \vec{B} &= B_s \nabla s + B_\theta \nabla \theta + B_\zeta \nabla \zeta \\ &= \tilde{\beta} \nabla s + I \nabla \theta + J \nabla \zeta\end{aligned}$$

となり、特に磁場の共変成分が簡単になっていることが分かる。

Boozer 座標系における様々な関係式は、4.2 節の VMEC に対する諸式において $\lambda = \tilde{\phi} = 0$ とすればそのまま使える。ただし、VMEC とは異なり $\zeta \neq \varphi$ であるので、VMEC に対して示されたヤコビアン

$$\sqrt{g}_{VMEC} = R \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial Z}{\partial s} - \frac{\partial R}{\partial s} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right)$$

は Boozer 座標系では

$$\sqrt{g} = R \left\{ \frac{\partial R}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial Z}{\partial \zeta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial Z}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial R}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \frac{\partial Z}{\partial s} - \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial Z}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial Z}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial Z}{\partial s} \right) \right\}$$

となることに注意（これと等価であるがヤコビアンは計量テンソルの行列式からも求められる）。実際には、VMEC における局所平衡の問題という観点からすれば、これらの関係を使うよりも

$$\sqrt{g} = \frac{I\chi' + J\phi'}{B^2} = \sigma \frac{\langle B^2 \rangle}{B^2} \mathcal{V}'$$

を用いる方が望ましいと思われる。それ以外の諸式は 4.2 節参照。

VMEC で得られた平衡データ (`wout` ファイル) を Boozer 座標系に変換するプログラムとして、古くは `newboz` コード、最近では `booz_xform` コードが挙げられる。どちらも基本的には同じことを行っている（計算法のメモも VMEC Wiki などでも見られる）が、細かいところで差が見られるため、少々注意が必要である。

まず、知る限りにおいて `newboz` コードはステラレータ対称性（軸対称配位なら上下対称性）があり、VMEC において `lsym=true` として計算した場合にしか対応しておらず、物理量の磁気面上でのフーリエ級数展開が偶関数（ R や B などは \cos 展開）か奇関数（ Z や λ などは \sin 展開）のどちらかのみで表される場合にしか使えない。通常、ほとんど全てのステラレータ/ヘリオトロン配位はこのケースに該当しているが、最近の上下非対

称トカマク配位（シングルヌル・ダイバータ配位など）には使えない。この newboz コードにおいて注意すべき点は、物理量の磁気面上でのフーリエ級数展開が VMEC では $\cos(m\theta - n\zeta)$ や $\sin(m\theta - n\zeta)$ のように表しているのに対し、newboz の出力では

$$\begin{aligned} R(s, \theta, \zeta) &= \sum R_{mn} \cos(-m\theta + n\zeta) \\ Z(s, \theta, \zeta) &= \sum Z_{mn} \sin(-m\theta + n\zeta) \\ \varphi(s, \theta, \zeta) &= \zeta + \sum \varphi_{mn} \sin(-m\theta + n\zeta) \\ B(s, \theta, \zeta) &= \sum B_{mn} \cos(-m\theta + n\zeta) \end{aligned}$$

となっていることである（ \cos は偶関数なのであまり気にする必要はない）。これは、単なる想像だが、上下反転により右手系への変換を意図したこともかもしれない。また、出力の shalf は径方向座標 s ではなく、VMEC の説明にある $\phi = \sigma \Phi_{tor} / 2\pi$ 、wjs は $\langle B_\theta \rangle = I = \sigma \mu_0 I_{tor} / 2\pi$ 、wjs は $\langle B_\zeta \rangle = J (= G) = \sigma \mu_0 I_{pol}^{out} / 2\pi$ であることを留意する。

一方、新しい booz_xform コードでは非対称な場合も取り扱うことができ、その場合は

$$\begin{aligned} R(s, \theta, \zeta) &= \sum \{R_{mn}^c \cos(m\theta - n\zeta) + R_{mn}^s \sin(m\theta - n\zeta)\} \\ Z(s, \theta, \zeta) &= \sum \{Z_{mn}^c \cos(m\theta - n\zeta) + Z_{mn}^s \sin(m\theta - n\zeta)\} \\ \varphi(s, \theta, \zeta) &= \zeta + \sum \{\varphi_{mn}^c \cos(m\theta - n\zeta) + \varphi_{mn}^s \sin(m\theta - n\zeta)\} \\ B(s, \theta, \zeta) &= \sum \{B_{mn}^c \cos(m\theta - n\zeta) + B_{mn}^s \sin(m\theta - n\zeta)\} \end{aligned}$$

である。それ以外は、出力フォーマットが若干違うが、newboz とほぼ同様である。

5.2 変換コードの出力から右手系への変換

左手系に慣れない場合には、左手系で計算された VMEC の出力を用いて newboz や booz_xform などの変換コードで左手系 Boozer 座標系へ変換した後、その出力を操作することで右手系 Boozer 座標系に変換することができる。

左手系 Boozer 座標から右手系 Boozer 座標系を構築するには、二通りの方法が考えられる。一つは上下を反転させる方法（図 8）と、もう一つは θ 方向の反転（図 7）であるが、おそらく θ 方向の反転の方が良いだろう。ただし、newboz を用いている場合には上下反転も悪くないと思われる。

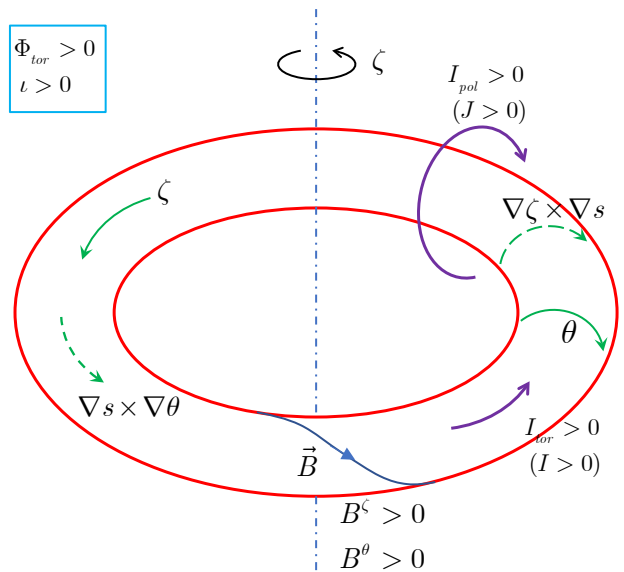


図 8 図 6 の配位を上下反転して得られる右手系磁気座標 ($\sigma = 1$)

(A) 上下反転

先に述べたように、newboz ではフーリエ級数展開の表現が少し違うが、これを意識せずに

$$Z(s, \theta, \zeta) = \sum Z_{mn} \sin(m\theta - n\zeta)$$

などのようにしてしまうと、sin モードだけ符号反転してしまう。この状況は図 8 に対応している。このようにして得られた $R(s, \theta, \zeta)$, $Z(s, \theta, \zeta)$ などを用いて計量テンソルなどを計算すれば、右手座標系となる。ただし、 $\varphi(s, \theta, \zeta)$ は上下反転しても変わらないので、 $\varphi_{mn}^{new} = -\varphi_{mn}$ のように元に戻しておく必要がある。また、トロイダル磁束に対応する ϕ も $\phi^{new} = -\phi$ とする必要がある。ポロイダル磁束に対応する χ はこの ϕ^{new} と l から計算すれば自然に符号が反転する。図からもわかるように、 l や I, J はそのままである。あとはヤコビアンなどはとくに注意する必要もなく正となり、 σ も +1 と考えればよい。

上下反転配位は元の配位と等価なので、物理的には問題ないが、実際の装置と比べるときには注意が必要である。そういう意味では θ 方向の反転による右手系への変換のほうが自然かもしれない。

(B) θ 方向反転

この場合、ポロイダル方向、すなわち θ 方向を反転させに $\theta^{new} = -\theta$ とすればよいが、一番良い方法はフーリエ級数におけるポロイダルモード数の符号を反転し、 $m^{new} = -m$ とすることである。あとは newboz や booz_xform におけるフーリエ級数展開の表現のまま (θ, ζ) 空間に戻すだけでよい。

θ 方向反転に伴い右手系 $\sigma = +1$ となるため、図 7 のようにトロイダル磁束に対応する ϕ とトロイダル電流に対応する I も、それぞれ $\phi^{new} = -\phi$ 、 $I^{new} = -I$ (wjs の符号反転) とする必要がある。また、 θ 方向が反転するので回転変換 l の符号も反転させる。ポロイダル磁束やヤコビアン等、その他の諸量は、右手系として、これらから計算すれば全て求められるはずである。

6. Ballooning モード方程式

6.1 Ballooning モード方程式

前章までの議論のように VMEC コードで得られた MHD 平衡を Boozer 座標系に変換した結果は、粒子軌道計算、MHD 安定性計算など様々なプラズマ解析に用いられる。ここではその応用の一例として ballooning モードの局所解析を取り上げる。

圧力駆動型 MHD 不安定性に対する局所安定性解析法として、ballooning モード方程式を用いた局所解析が挙げられる。ballooning モード方程式は、WKB 近似を用いることにより得られる磁力線方向一次元の 2 階常微分方程式

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{k_{\perp}^2}{B^2} \vec{B} \cdot \nabla \xi \right) + \frac{2\mu_0}{B^4} (\vec{B} \times \vec{k}_{\perp} \cdot \nabla p) (\vec{B} \times \vec{k}_{\perp} \cdot \vec{\kappa}) \xi + \rho \omega^2 \left(\frac{k_{\perp}^2}{B^2} \right) \xi = 0 \quad (6.1)$$

$$\vec{k}_{\perp} / k_{\alpha} = \nabla \alpha + \theta_k \nabla q = (\nabla \zeta - q \nabla \theta) - (\theta - \theta_k) \nabla q$$

$$\theta_k = k_q / k_{\alpha}$$

である。この式の導出などはここではしない。また、記号の説明も後述する。この方程式はフルート近似に起因する永年項 $(\theta - \theta_k) \nabla q$ を含むため、物理的な周期条件を満足しない。このため、この方程式は covering space と呼ばれる仮想的な空間で固有値問題として解析される。得られた固有関数はそれ自身では周期性を満たしていないため準モードと呼ばれ、準モードの重ねあわせで物理的な固有関数が得られる。しかし、安定性を議論する場合には通常準モードの解析で十分なことが多い。

Mercier 条件が磁気面上で（磁力線方向に）比較的広がったモード構造を持つ交換型モードの安定性を調べているのに対し、ballooning モード方程式を用いた局所解析では、摂動が磁気面上の曲率の悪い領域に局在したバルーニングモードの解析が可能となる。このバルーニングモードは Mercier 条件が安定を示す場合でも不安定となりえるので、トカマクの安定ベータ限界を調べる場合にはこのバルーニングモードの安定性が重要となっている。また、 s - α ダイアグラム（ s は磁気シアの指標、 α は圧力勾配の指標を表わし、上式における磁力線のラベル α とは異なることに注意）はその性質をよく表わしたものとして有名である。

トカマクにおけるバルーニングモード解析と非軸対称プラズマにおけるバルーニングモード解析で大きく異なる点は、まず非軸対称プラズマでは ballooning モード方程式における平衡量がトロイダル依存性を持っていることである。また、軸対称配位においてはどの磁力線も等価であるため、結果に磁力線のラベル α 依存性がないが、非軸対称プラズマに対しては α 依存性があり、磁力線ごとに解析する必要がある。また、トカマクにおいては高次の解析を行うとトロイダルモード数 n に関して量子化することができ、有限のトロイダルモード数に対する固有値を求めることができるのに対し、ヘリカル系では異なったトロイダルモード数を持つ摂動はお互いにモード結合を起こすため、多くの場合量子化できない。ヘリカル系プラズマにおいても 3 次元大域的 MHD 解析コードと局所安定性解析との相関関係について詳細な検討が行われている。

6.2 Eikonal 近似と垂直波数ベクトル、局所磁気シア

ballooning モード方程式において、座標系として安全係数 q 、磁力線方向の距離 l （もしくはそれと等価な座

標)、磁力線のラベル α を座標とする (α, q, ℓ) 座標系を考える。この節での磁力線のラベル α の定義は、式(3.7)とは(等価であるが)異なり、(Boozer 座標系を含む) SFL 座標系のトロイダル角とポロイダル角を用いて、

$$\alpha = \zeta - q\theta \quad (6.2)$$

とする。ここでは、安全係数 q を磁気面のラベルとし径方向座標としているため、少なくとも局所的には磁気シアがゼロでない必要がある。また、この座標系はこのままでは周期性や一価性を満足しない非物理的空間であり、covering space と呼ばれるが、この点についてもここでは議論しない。ballooning モード方程式は磁力線に沿った微分方程式で、式(6.1)の $\vec{B} \cdot \nabla$ は $B \frac{d}{d\ell}$ と書くことができる。また、磁力線の方程式

$$\frac{d\theta}{B^\theta} = \frac{d\zeta}{B^\zeta} = \frac{d\ell}{B} \quad (6.3)$$

より、磁力線に沿った θ や ζ の変化は ℓ の関数として、 $\theta(\ell) = \int \frac{B^\theta}{B} d\ell$ 、 $\zeta(\ell) = \int \frac{B^\zeta}{B} d\ell$ で表される。また、 ℓ の代わりに θ を磁力線に沿った座標と選ぶなら、 $\vec{B} \cdot \nabla$ は $B^\theta \frac{d}{d\theta}$ と書くこともできる(このとき、 ζ は θ の関数として $\zeta(\theta) = q\theta + \alpha(\text{const.})$ となる。同様に、 ζ を磁力線に沿った座標とすることも可)。

ballooning モード方程式の導出過程では、MHD 線形安定性における(磁力線に)垂直な摂動ベクトル $\vec{\xi}_\perp(\vec{r})$ を磁力線垂直方向に Fourier 変換する。

$$\vec{\xi}_\perp(\vec{r}) = \iint \vec{\eta}_\perp(\ell; \vec{k}_\perp) \exp(i\vec{k}_\perp \cdot \vec{r}) d\vec{k}_\perp \quad (6.4)$$

ここで Eikonal S を $S \equiv \vec{k}_\perp \cdot \vec{r}$ と定義すると $\nabla S = \vec{k}_\perp$ である。Eikonal 近似では磁力線に垂直方向には短波長の構造を持つ flute-like な摂動を考え、磁力線方向の波数を $k_\parallel \sim O(1)$ 、垂直波数を $k_\perp \sim O(\varepsilon^{-1})$ (すなわち $S \sim O(\varepsilon^{-1})$)とオーダーリングしている。ballooning モードの局所解析では、(一番不安定性になりそうな)波数を与えて解析を行うため、摂動は与えられた波数に対して

$$\vec{\xi}_\perp(\vec{r}) = \vec{\eta}_\perp(\ell) \exp(iS) \quad (6.5)$$

と書けるとする。さらに、 $\vec{\eta}_\perp(\ell)$ は energy minimization の観点から \vec{k}_\perp にも垂直な摂動が最も不安定なので、

$$\vec{\eta}_\perp(\ell) = \xi(\ell) \frac{\vec{B} \times \vec{k}_\perp}{B^2} \quad (6.6)$$

と選ぶ。この $\xi(\ell)$ が ballooning モード方程式(6.1)の ξ である。

波数ベクトル \vec{k}_\perp を (q, ℓ, α) 座標系における共変成分表示すると

$$\begin{aligned} \vec{k}_\perp &= \nabla S(q, \alpha) \\ &= k_\alpha \nabla \alpha + k_q \nabla q \\ &= k_\alpha (\nabla \alpha + \theta_k \nabla q) \end{aligned} \quad (6.7)$$

と書くことができる。ここで、

$$\theta_k = k_q / k_\alpha \quad (6.8)$$

である。式(6.1)の各項は全て \vec{k}_\perp の 2 次式となっているため、ballooning モード方程式の固有関数と固有値は k_α には依存せず、波数に対して与えるべき条件は θ_k のみとなる。そのため、これ以降は \vec{k}_\perp / k_α を \vec{k}_\perp と書き、

$$\vec{k}_\perp = \nabla\alpha + \theta_k \nabla q \quad (6.9)$$

とする。 α の定義から SFL 座標系の (s, θ, ζ) を用いて、

$$\vec{k}_\perp = \nabla\zeta - q\nabla\theta - q'(\theta - \theta_k)\nabla s \quad (6.10)$$

と書ける。ここで注意すべきは、この式の第 3 項目に永年項 (θ の線形項) が入っている点である。磁力線に沿って covering space を遠方まで解いていくと \vec{k}_\perp は $\theta(\ell)$ に比例して増大していく。 θ の係数には q' が入っているため、この増え方は磁気シアが大きいほど大きい。このことを、模式図 9 を用いて視覚的に説明しよう。簡単のため $\theta_k = 0$ として、説明する。まず、 $(\alpha_1, q_1, \theta_1)$ を出発点とする磁力線を考えよう。磁力線は $(\alpha, q) = const.$ の線であるので、この磁力線がトロイダル方向に 1 周したときの座標を $(\alpha_1, q_1, \theta_2)$ 、もう 1 周したときの座標を $(\alpha_1, q_1, \theta_3)$ とする。また同じ磁気面上にあり、この磁力線に近接した、 $(\alpha_1 + \Delta\alpha, q_1, \theta_1)$ を出発点とする磁力線を考える。さらに、この磁気面から Δq だけ離れた $q = q_1 + \Delta q$ の磁気面上でも、同様の磁力線を考える。 $\theta_k = 0$ のとき、 $\vec{k}_\perp = \nabla\alpha$ であるので、 $\alpha = \alpha_1$ 面と $\alpha = \alpha_1 + \Delta\alpha$ 面の距離を Δd とすれば波数ベクトルの大きさは $|\vec{k}_\perp| \sim |\Delta\alpha / \Delta d|$ である。したがって出発点では \vec{k}_\perp は、ほぼポロイダル方向を向くベクトルである。しかし、磁力線に沿って進み θ が大きくなると (例えば図では $\theta = \theta_3$ のとき)、磁気面によって安全係数が異なる (磁力線のポロイダル方向への進み方が異なる) ため、図に示す通り波面 $\alpha = const.$ 面がひしゃげて波数ベクトルは径方向を向くようになるとともに、波面間の距離 Δd は短くなり、 $|\vec{k}_\perp|$ は増大する (図 9 では Δq が負のケースとなっているが、正でも \vec{k}_\perp の向きは変わるが同様の議論となる)。

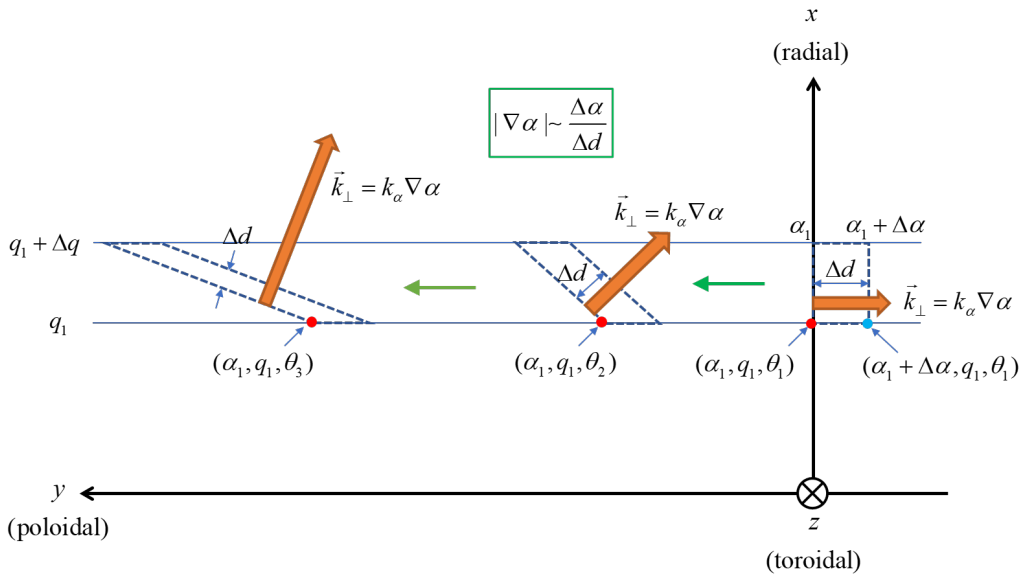


図 9 垂直波数ベクトルに対する模式図 ($\theta_k = 0$ ($k_q = 0$) の場合)

以上の議論から、垂直波数ベクトルは磁気シアと密接な関係があることが分かる。以下に、local magnetic shear と波数ベクトルの関係を議論する。まず、R. L. Dewar ら (Phys. Fluids, **27** (1984) 1723) に従って、local magnetic shear を定義しよう。式(6.7)の $\nabla\alpha$ における $\nabla\zeta - q\nabla\theta$ の項を \vec{g} と定義し、

$$\begin{aligned}\nabla\alpha &= \nabla\zeta - q\nabla\theta - q'\theta\nabla s \\ &= \vec{g} - q'\theta\nabla s\end{aligned}\tag{6.11}$$

と書き、 $\nabla\alpha$ の磁気面に接する成分を

$$\vec{s} = \nabla\alpha - \frac{\nabla\alpha \cdot \nabla s}{|\nabla s|^2} \nabla s = \nabla\alpha - \hat{\alpha}^s \nabla s\tag{6.12}$$

と定義する。ここで、 $\hat{\alpha}^s \nabla s$ は、 $\nabla\alpha$ の磁気面に垂直な成分であり、

$$\hat{\alpha}^s \equiv \frac{\nabla\alpha \cdot \nabla s}{|\nabla s|^2}\tag{6.13}$$

である。また、磁場は $\vec{B} = \vec{s} \times \nabla\chi$ と書けるので

$$\vec{s} = \frac{\nabla\chi \times \vec{B}}{|\nabla\chi|^2}\tag{6.14}$$

と書くこともできる。

ベクトル \vec{g} の磁気面に垂直な成分に対応する

$$\hat{g}^s \equiv \frac{\vec{g} \cdot \nabla s}{|\nabla s|^2}\tag{6.15}$$

を定義すると、 $\hat{\alpha}^s$ は、

$$\hat{\alpha}^s = -\frac{\nabla\alpha \cdot \nabla s}{|\nabla s|^2} = \hat{g}^s - q'\theta\tag{6.16}$$

となる。ここで、プライムは s 微分であることに注意。式(6.16)は磁気シアの磁力線に沿った積分に対応しており、Dewar らの論文では

$$\begin{aligned}\hat{S} &\equiv -\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\hat{\alpha}^s}{\chi'} \right) \\ &= \frac{\chi'}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + q \frac{\partial}{\partial\zeta} \right) \left(\frac{q'}{\chi'} \theta - \frac{\hat{g}^s}{\chi'} \right) \\ &= \frac{\chi'}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{q'}{\chi'} - \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + q \frac{\partial}{\partial\zeta} \right) \left(\frac{\hat{g}^s}{\chi'} \right) \right\}\end{aligned}\tag{6.17}$$

を local magnetic shear として定義し、 q'/χ' を global magnetic shear、 $-\hat{g}^s/\chi'$ を integrated residual shear と呼んでいる。ここで、 \sqrt{g} は (s, θ, ζ) 座標系におけるヤコビアンである。ここでは、local magnetic

shear を、 $\hat{S} = \hat{S}_{global} + \hat{S}_{res}$ 、

$$\hat{S}_{global} = \frac{q'}{\sqrt{g}}, \quad \hat{S}_{res} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + q \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \hat{g}^s \quad (6.18)$$

と置き、 \hat{S}_{global} を global magnetic shear、 \hat{S}_{res} を residual magnetic shear と呼ぶことにする。また、式(6.12)の回転を取ると、

$$\begin{aligned} \hat{S} &= -\vec{s} \cdot \nabla \times \vec{s} \\ &= -\left(\frac{\nabla \chi \times \vec{B}}{|\nabla \chi|^2} \right) \cdot \nabla \times \left(\frac{\nabla \chi \times \vec{B}}{|\nabla \chi|^2} \right) \end{aligned} \quad (6.19)$$

となるため、これを local magnetic shear の定義とすることも多い。

式(6.11)と式(6.16)から、磁気シアは垂直波数ベクトル (式(6.9)) の反変 s 成分 (磁気面に垂直な成分)

$$\begin{aligned} k_{\perp}^s &= \vec{k}_{\perp} \cdot \nabla s \\ &= \vec{g} \cdot \nabla s - q'(\theta - \theta_k) |\nabla s|^2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

と密接な関係があることがわかる。式(6.20)より、

$$\frac{k_{\perp}^s}{|\nabla s|^2} = \hat{g}^s - q'(\theta - \theta_k) = \hat{\alpha}^s + q'\theta_k \quad (6.21)$$

である。式(6.21)を式(6.17)に代入すると local magnetic shear は

$$\hat{S} = -\frac{1}{\chi'} \vec{B} \cdot \nabla \hat{\alpha}^s = -\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{k_{\perp}^s}{\chi' |\nabla s|^2} \right) \quad (6.22)$$

となる。したがって、

$$\Lambda^* \equiv -\frac{k_{\perp}^s}{\chi' |\nabla s|^2} = \int \hat{S} \frac{d\ell}{B} - \frac{q'}{\chi'} \theta_k = \int \hat{S} \frac{d\theta}{B^{\theta}} - \frac{q'}{\chi'} \theta_k \quad (6.23)$$

は局所磁気シアの積分値、integrated local magnetic shear であることがわかる。式(6.23)において、 $(q' / \chi')\theta_k$ は積分定数である。式(6.23)は、図 9 に示したように、local magnetic shear の積分値が磁力線に沿って増大していくに連れ、 \vec{k}_{\perp} の径方向成分 k_{\perp}^s が増大するということに対応している。

最後に、ballooning モード方程式(6.1)に現れる k_{\perp}^2 を評価する。式(6.10)より、単純に、

$$k_{\perp}^2 = g^{\zeta\zeta} + q^2 g^{\theta\theta} + q'^2 (\theta - \theta_k)^2 g^{ss} - 2qg^{\theta\zeta} - 2q'(\theta - \theta_k)g^{s\zeta} + 2qq'(\theta - \theta_k)g^{s\theta}$$

と計算することも可能であるが、物理的にわかりにくい上、VMEC における局所平衡の問題を考慮すると計量テンソルの使用はなるべく避けたい。そこで、結果的には理論上同じ値を計算することになるが、以下のように導出する。

式(6.9)を用いれば、

$$\begin{aligned} k_{\perp}^2 &= (\nabla\alpha + q'\theta_k \nabla s)^2 \\ &= |\nabla\alpha|^2 + 2q'\theta_k \nabla\alpha \cdot \nabla s + (q'\theta_k)^2 |\nabla s|^2 \end{aligned} \quad (6.24)$$

と書ける。ここで、式(6.12)より $\nabla\alpha = \vec{s} + \hat{\alpha}^s \nabla s$ なので代入し、式(6.22)を用いると

$$\begin{aligned} k_{\perp}^2 &= |\vec{s}|^2 + 2\hat{\alpha}^s \vec{s} \cdot \nabla s + (\hat{\alpha}^s + q'\theta_k)^2 |\nabla s|^2 \\ &= |\vec{s}|^2 + (\hat{\alpha}^s + q'\theta_k)^2 |\nabla s|^2 \\ &= |\vec{s}|^2 + \frac{(k_{\perp}^s)^2}{|\nabla s|^2} \end{aligned} \quad (6.25)$$

となる。また、 $\vec{B} = \chi' \vec{s} \times \nabla s$ より、

$$\begin{aligned} B^2 &= \chi'^2 (\vec{s} \times \nabla s)^2 \\ &= \chi'^2 \{ |\vec{s}|^2 |\nabla s|^2 - (\vec{s} \cdot \nabla s)^2 \} \\ &= \chi'^2 |\vec{s}|^2 |\nabla s|^2 \end{aligned} \quad (6.26)$$

であるから、

$$k_{\perp}^2 = \frac{B^2}{\chi'^2 |\nabla s|^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\chi' k_{\perp}^s}{B} \right)^2 \right\} \quad (6.27)$$

が得られる。さらに、 k_{\perp}^s を integrated local magnetic shear に対応する

$$\Lambda \equiv -\frac{\chi' k_{\perp}^s}{B} = \frac{\chi'^2 |\nabla s|^2}{B} \Lambda^* \quad (6.28)$$

で表せば、

$$k_{\perp}^2 = \frac{B^2}{\chi'^2 |\nabla s|^2} (1 + \Lambda^2) \quad (6.29)$$

が得られる。Boozer 座標系において、 Λ は式(6.20)より

$$\Lambda = \frac{\chi'}{B} \left(q'(\theta - \theta_k) |\nabla s|^2 - \frac{1}{\chi' \sqrt{g}} (Jg_{s\theta} - I g_{s\zeta}) \right) \quad (6.30)$$

から比較的簡単に計算できる。この導出には

$$\begin{aligned} B_{\theta} &= I = g_{\theta\theta} B^{\theta} + g_{\theta\zeta} B^{\zeta} = \frac{\chi'}{\sqrt{g}} (g_{\theta\theta} + qg_{\theta\zeta}) \\ B_{\zeta} &= J = g_{\zeta\theta} B^{\theta} + g_{\zeta\zeta} B^{\zeta} = \frac{\chi'}{\sqrt{g}} (g_{\zeta\theta} + qg_{\zeta\zeta}) \end{aligned} \quad (6.31)$$

を用い、計量テンソル $g^{s\theta}$ や $g^{s\zeta}$ が現れないようにしている。

式(6.23)の integrated local magnetic shear Λ^* は、式(6.28)と(6.30)から

$$\Lambda^* = \frac{q'}{\chi'}(\theta - \theta_k) - \frac{Jg_{s\theta} - Ig_{s\zeta}}{\chi'^2 \sqrt{g} |\nabla s|^2} \quad (6.32)$$

となるので integrated global shear と integrated residual shear は

$$\Lambda^*_{global} \equiv \int \hat{S}_{global} \frac{d\theta}{B^\theta} - \frac{q'}{\chi'} \theta_k = \frac{q'}{\chi'}(\theta - \theta_k) \quad (6.33)$$

$$\Lambda^*_{res} \equiv \int \hat{S}_{res} \frac{d\theta}{B^\theta} = -\frac{Jg_{s\theta} - Ig_{s\zeta}}{\chi'^2 \sqrt{g} |\nabla s|^2} \quad (6.34)$$

であることがわかる。integrated local magnetic shear Λ^* を陽に用いると k_\perp^2 は

$$\begin{aligned} k_\perp^2 &= \frac{B^2}{\chi'^2 |\nabla s|^2} + \chi'^2 |\nabla s|^2 (\Lambda^*_{global} + \Lambda^*_{res})^2 \\ &= \frac{B^2}{\chi'^2 |\nabla s|^2} + \chi'^2 |\nabla s|^2 \left(\int \hat{S} \frac{d\theta}{B^\theta} - \frac{q'}{\chi'} \theta_k \right)^2 \end{aligned} \quad (6.35)$$

とも書ける。

6.3 磁力線の曲率ベクトル

一般に曲線の曲率ベクトルは、単位接線ベクトルの曲線に沿った変化を表すベクトルで、磁力線の場合、単位接線ベクトルが $\vec{b} = \vec{B}/B$ なので、

$$\vec{\kappa} = \vec{b} \cdot \nabla \vec{b}$$

で表される。よく知られているように、磁力線の曲率は MHD 的電磁力 $\vec{j} \times \vec{B}$ と密接な関係があり、電磁力は

$$\begin{aligned} \vec{j} \times \vec{B} &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \\ &= \frac{B^2}{\mu_0} \vec{\kappa} - \nabla_\perp \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) \end{aligned}$$

のように、磁力線の張力と、磁力線に垂直方向の磁気圧勾配による力で表すことができる。とくに MHD 平衡が成り立っているとき、 $-\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} = 0$ なので MHD 平衡配位の磁力線曲率は

$$\vec{\kappa} = \frac{\mu_0}{B^2} \nabla_\perp \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \quad (6.36)$$

と表すことができる。ここで、

$$\nabla_\perp = \nabla - \vec{b}(\vec{b} \cdot \nabla)$$

であることに注意すると

$$\vec{\kappa} = \frac{1}{B^2} \left(\nabla(\mu_0 p) + B \nabla B - \frac{\vec{B}}{B} \vec{B} \cdot \nabla B \right) \quad (6.37)$$

となる。これを用いて、磁力線の曲率を評価する。

式(6.37)は共変成分表示すると

$$\begin{aligned} \vec{\kappa} &= \frac{1}{B^2} \left\{ \mu_0 p' \nabla s + B \left(\frac{\partial B}{\partial s} \nabla s + \frac{\partial B}{\partial \theta} \nabla \theta + \frac{\partial B}{\partial \zeta} \nabla \zeta \right) - \frac{\vec{B} \cdot \nabla B}{B} (B_s \nabla s + B_\theta \nabla \theta + B_\zeta \nabla \zeta) \right\} \\ &= \frac{1}{B^2} \left(\mu_0 p' + B \frac{\partial B}{\partial s} - \frac{\vec{B} \cdot \nabla B}{B} B_s \right) \nabla s + \frac{1}{B^2} \left(B \frac{\partial B}{\partial \theta} - \frac{\vec{B} \cdot \nabla B}{B} B_\theta \right) \nabla \theta + \frac{1}{B^2} \left(B \frac{\partial B}{\partial \zeta} - \frac{\vec{B} \cdot \nabla B}{B} B_\zeta \right) \nabla \zeta \end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned} \vec{\kappa} &= \kappa_s \nabla s + \kappa_\theta \nabla \theta + \kappa_\zeta \nabla \zeta \\ \kappa_s &= \frac{1}{B^2} \left(\mu_0 p' + B \frac{\partial B}{\partial s} - \frac{\vec{B} \cdot \nabla B}{B} B_s \right) \\ \kappa_\theta &= \frac{1}{B^3} \left(B^2 \frac{\partial B}{\partial \theta} - (\vec{B} \cdot \nabla B) B_\theta \right) \\ &= \frac{1}{B^3} \left((B^\theta B_\theta + B^\zeta B_\zeta) \frac{\partial B}{\partial \theta} - (B^\theta \frac{\partial B}{\partial \theta} + B^\zeta \frac{\partial B}{\partial \zeta}) B_\theta \right) = -\frac{B^\zeta}{B^3} \left(B_\theta \frac{\partial B}{\partial \zeta} - B_\zeta \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \\ \kappa_\zeta &= \frac{1}{B^3} \left(B^2 \frac{\partial B}{\partial \zeta} - (\vec{B} \cdot \nabla B) B_\zeta \right) \\ &= \frac{B^\theta}{B^3} \left(B_\theta \frac{\partial B}{\partial \zeta} - B_\zeta \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\kappa_\theta = -(B^\zeta / B^\theta) \kappa_\zeta = -q \kappa_\zeta$ となることに注意する。MHD 安定性理論では、 $\vec{\kappa}_s = \kappa_s \nabla s$ は (κ_s は磁気面の法線方向成分ではないが) normal curvature と呼ばれることが多い。

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \frac{1}{B^2} \left(\mu_0 p' + B \frac{\partial B}{\partial s} - \frac{\vec{B} \cdot \nabla B}{B} B_s \right) \\ &= \frac{1}{B^2} \left[\mu_0 p' + B \frac{\partial B}{\partial s} - \frac{B_s}{\sqrt{g} B} \left(\chi' \frac{\partial B}{\partial \theta} + \phi' \frac{\partial B}{\partial \zeta} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.38)$$

一方、残りの項は

$$\begin{aligned} \kappa_\theta \nabla \theta + \kappa_\zeta \nabla \zeta &= \kappa_\zeta (\nabla \zeta - q \nabla \theta) \\ &= \frac{B^\theta}{B^3} \left(B_\theta \frac{\partial B}{\partial \zeta} - B_\zeta \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) (\nabla \zeta - q \nabla \theta) \\ &= \frac{\chi'}{\sqrt{g} B^3} \left(I \frac{\partial B}{\partial \zeta} - J \frac{\partial B}{\partial \theta} \right) \vec{g} \end{aligned}$$

となる。この導出には $B^2 = B^\theta B_\theta + B^\zeta B_\zeta$ を用いた。このベクトルを geodesic curvature $\vec{\kappa}_g$ と定義する。

$$\begin{aligned}\vec{\kappa}_g &= \kappa_g \vec{g} \\ &= \kappa_\theta \nabla \theta + \kappa_\zeta \nabla \zeta\end{aligned}\quad (6.39)$$

ここで、

$$\kappa_g = \kappa_\zeta = \frac{\chi'}{\sqrt{g}B^3} \left(I \frac{\partial B}{\partial \zeta} - J \frac{\partial B}{\partial \theta} \right)\quad (6.40)$$

である。したがって、磁力線の曲率ベクトルは

$$\begin{aligned}\vec{\kappa} &= \vec{\kappa}_s + \vec{\kappa}_g \\ &= \kappa_s \nabla s + \kappa_g \vec{g}\end{aligned}\quad (6.41)$$

と表すことができる。

この磁力線曲率を用いて、ballooning モード方程式(6.1)の左辺第2項、圧力駆動項を評価する。式(6.9)より、垂直波数ベクトルが $\vec{k}_\perp = \nabla \alpha + q' \theta_k \nabla s$ であることと、 $\vec{B} = \chi' \nabla \alpha \times \nabla s$ であることを用いると

$$\vec{B} \cdot \vec{k}_\perp \times \nabla p = p' \vec{B} \cdot (\nabla \alpha + q' \theta_k \nabla s) \times \nabla s = \frac{p'}{\chi'} B^2\quad (6.42)$$

である。同様に式(6.11)を用いると

$$\begin{aligned}\vec{B} \cdot \vec{k}_\perp \times \vec{\kappa} &= \vec{B} \cdot (\nabla \alpha + q' \theta_k \nabla s) \times (\kappa_s \nabla s + \kappa_g \vec{g}) \\ &= \kappa_s \frac{B^2}{\chi'} + \kappa_g \vec{B} \cdot (\nabla \alpha + q' \theta_k \nabla s) \times (\nabla \alpha + q' \theta \nabla s) \\ &= \frac{B^2}{\chi'} \left\{ \kappa_s + q' (\theta - \theta_k) \kappa_g \right\}\end{aligned}\quad (6.43)$$

となる。したがって圧力駆動項は

$$\frac{2\mu_0}{B^4} \left(\vec{B} \times \vec{k}_\perp \cdot \nabla p \right) \left(\vec{B} \times \vec{k}_\perp \cdot \vec{\kappa} \right) \xi = \frac{2\mu_0}{\chi'^2} p' \left\{ \kappa_s + q' (\theta - \theta_k) \kappa_g \right\} \xi\quad (6.44)$$

と書くことができ、geodesic curvature の項に、再び永年項が現れる。

これまで、曲率ベクトルは共変 s 成分を用いて表してきた。一方、曲率ベクトルの反変 s 成分は、曲率の磁気面に垂直な成分（本当の意味の normal curvature ?）に対応しているが、式(6.41)より、

$$\begin{aligned}\kappa^s &= \vec{\kappa} \cdot \nabla s \\ &= \kappa_s |\nabla s|^2 + \kappa_g \vec{g} \cdot \nabla s \\ &= \kappa_s |\nabla s|^2 + \kappa_g \hat{g}^s |\nabla s|^2\end{aligned}\quad (6.45)$$

なる。したがって、圧力駆動項の曲率項(6.44)の括弧内を κ^s を用いて表すと、式(6.21)より

$$\kappa_s + q'(\theta - \theta_k)\kappa_g = \frac{1}{|\nabla s|^2} (\kappa^s - \kappa_g k_{\perp}^s) = \frac{\kappa^s}{|\nabla s|^2} + \kappa_g \chi' \Lambda^* \quad (6.46)$$

となり、圧力駆動項における永年項も k_{\perp}^s (integrated local shear、 Λ^* に対応)、つまり磁気シアにより波面がひしゃげる影響であることがわかる。

最後に、式(6.38)の normal curvature と式(6.40)の geodesic curvature を、Boozer 座標系において計算に都合の良い形に書き直す。とくにこれまでも述べたとおり、 B_s は計量テンソルからではなく、局所平衡から求める。また、Boozer 座標系ではヤコビアン²の磁気面上での分布は $1/B^2$ に比例していることから、磁場の変化は $1/B^2$ のフーリエ級数で表すほうが容易である。式(3.16)から、Boozer 座標系において $\tilde{\phi} = 0$ であるので、 $B_s = \tilde{\beta}$ である。また、Boozer 座標系は SFL 座標系なので $\tilde{\alpha} = 0$ でもあり、式(3.25)より (左手系を考慮すると 4.2 の VMEC における磁気座標のまとめにある式のように) 局所平衡が成り立つには

$$\vec{B} \cdot \nabla B_s = \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} = -\mu_0 p' \left(\frac{\mathcal{V}'}{\sigma \sqrt{g}} - 1 \right) \quad (6.47)$$

でなければならない。さらに式(3.24)の磁気面平均された平衡の式より

$$\mu_0 p' \mathcal{V}' = -\sigma (J' \phi' + I' \chi') \quad (6.48)$$

であることを使うと、

$$\vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} = -\mu_0 p' \left(\frac{\mathcal{V}'}{\sigma \sqrt{g}} - 1 \right) = \mu_0 p' + \frac{J' \phi' + I' \chi'}{\sqrt{g}} \quad (6.49)$$

と書くことができる。そこで、式(6.38)の右辺第 3 項をこの形で書きなおす。

$$\begin{aligned} \frac{1}{B^3} B_s \vec{B} \cdot \nabla B &= -\frac{1}{B^3} \left\{ \frac{B^3}{2} \tilde{\beta} \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{1}{B^2} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tilde{\beta}}{B^2} \right) - \frac{1}{B^2} \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} \right\} \end{aligned}$$

であるから、式(6.38)は

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \frac{\mu_0 p'}{B^2} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{1}{2} \left\{ \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tilde{\beta}}{B^2} \right) - \frac{1}{B^2} \vec{B} \cdot \nabla \tilde{\beta} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 p'}{B^2} - \frac{B^2}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{B^2} \right) + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{\tilde{\beta}}{B^2} \right) - \frac{1}{2B^2} \left(\mu_0 p' + \frac{J' \phi' + I' \chi'}{\sqrt{g}} \right) \end{aligned}$$

と書ける。さらに Boozer 座標系では

$$\sqrt{g} = \frac{I \chi' + J \phi'}{B^2} \quad (6.50)$$

であることを用いると、最終的に

$$\kappa_s = \frac{1}{2\sqrt{g}} \left[\frac{\mu_0 p' \sqrt{g}}{B^2} + \phi' \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\tilde{\beta}}{B^2} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{J}{B^2} \right) \right\} + \chi' \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{\beta}}{B^2} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{I}{B^2} \right) \right\} \right] \quad (6.51)$$

が得られる。ここで、 $\tilde{\beta}$ は式(3.25)と(3.32)より

$$\begin{aligned} \left(\chi' \frac{\partial}{\partial \theta} + \phi' \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \tilde{\beta} &= \mu_0 p' (\sqrt{g} - \sigma \nu') \\ i(m\chi' - n\phi') \tilde{\beta}_{mn} &= \mu_0 p' \sqrt{g_{mn}} \\ \tilde{\beta}_{mn} &= -\frac{i\mu_0 p' \sqrt{g_{mn}}}{(m\chi' - n\phi')} = -\frac{i\mu_0 p' \sqrt{g_{mn}}}{\chi'(m - nq)} = \frac{i\mu_0 p' \sqrt{g_{mn}}}{\phi'(n - \iota m)} \end{aligned} \quad (6.52)$$

から求めることができるが、Boozer 座標系では \sqrt{g} は $1/B^2$ に比例するので、 $1/B^2$ のフーリエ級数を用いると $\tilde{\beta}$ は容易に求めることができる。

同様に、geodesic curvature は

$$\kappa_g = \frac{\chi'}{2\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{J}{B^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{I}{B^2} \right) \right\} \quad (6.53)$$

と書くことができる。

以上まとめると ballooning モード方程式は

$$\vec{B} \cdot \nabla \left(\frac{k_{\perp}^2}{B^2} \vec{B} \cdot \nabla \xi \right) + \left[\frac{2\mu_0}{\chi'^2} p' \{ \kappa_s + q'(\theta - \theta_k) \kappa_g \} + \rho \omega^2 \left(\frac{k_{\perp}^2}{B^2} \right) \right] \xi = 0 \quad (6.64)$$

と書くことができ、ここで Boozer 座標系では

$$\begin{aligned} k_{\perp}^2 &= \frac{B^2}{\chi'^2 |\nabla s|^2} (1 + \Lambda^2) \\ \Lambda &= \frac{\chi'}{B} \left(q'(\theta - \theta_k) |\nabla s|^2 - \frac{1}{\chi' \sqrt{g}} (Jg_{s\theta} - Ig_{s\zeta}) \right) \\ \kappa_s &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \left[\frac{\mu_0 p' \sqrt{g}}{B^2} + \phi' \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\tilde{\beta}}{B^2} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{J}{B^2} \right) \right\} + \chi' \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\tilde{\beta}}{B^2} \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{I}{B^2} \right) \right\} \right] \\ \kappa_g &= \frac{\chi'}{2\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{J}{B^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{I}{B^2} \right) \right\} \end{aligned}$$

である。また、この微分方程式の独立変数として θ を磁力線に沿った座標と選ぶなら、前述のとおり $\vec{B} \cdot \nabla$ は $B^\theta \frac{d}{d\theta}$ と書くこともでき (ζ は θ の関数として $\zeta(\theta) = q\theta + \alpha(const.)$)、 $B^\theta = \chi' / \sqrt{g}$ を用いると

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\chi'^2 k_{\perp}^2}{\sqrt{g} B^2} \frac{d}{d\theta} \xi \right) + \left[\frac{2\mu_0 \sqrt{g}}{\chi'^2} p' \{ \kappa_s + q'(\theta - \theta_k) \kappa_g \} + \rho\omega^2 \sqrt{g} \left(\frac{k_{\perp}^2}{B^2} \right) \right] \xi = 0 \quad (6.65)$$

もしくは k_{\perp}^2 を Λ で表して、

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{(1 + \Lambda^2)}{\sqrt{g} |\nabla s|^2} \frac{d\xi}{d\theta} \right) + \left[\frac{2\mu_0 \sqrt{g}}{\chi'^2} p' \{ \kappa_s + q'(\theta - \theta_k) \kappa_g \} + \rho\omega^2 \frac{\sqrt{g}}{\chi'^2 |\nabla s|^2} (1 + \Lambda^2) \right] \xi = 0$$

と書くことができる。

さらに、式(6.46)より

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1 + \Lambda^2}{\sqrt{g} |\nabla s|^2} \frac{d\xi}{d\theta} \right) + \left[\frac{2\mu_0 \sqrt{g}}{\chi'^2 |\nabla s|^2} p' \left\{ \kappa_s + \frac{B}{\chi'^2} \Lambda \kappa_g \right\} + \rho\omega^2 \frac{\sqrt{g}}{\chi'^2 |\nabla s|^2} (1 + \Lambda^2) \right] \xi = 0$$

と書けば、いわゆる $s - \alpha$ モデルにおける **ballooning** モード方程式との関係が分かりやすくなる。