2021年度 物理学基礎論B レポート試験問題

後期木曜日2限 石澤明宏

他者に解答を見せるあるいは他者の解答を見た場合、採点の対象になりません。問題は3問である。解答用紙に、氏名、学生番号、所属学部(および学科)、入学年、回生、組を書くこと。解答は答のみならず、それを導いた計算過程を記述すること。また、式変形の論理を文章で記述すること。教科書の例題とは異なるので、問題を良く読んで間違えないようにすること。全ての問題について、真空の誘電率を ϵ_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

問題1

半径 a の球面と半径 b の球面の間に全電荷 Q（$Q > 0$）が一様に分布する（図1)。ただし $a < b$ とする。以下の設問にしたがって、この電荷がつくる静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ などを求めよ。特に断らない限り、座標系は球の中心を原点とする球座標系 (r, θ, φ) を用いよ。対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_r(r), E_\theta(r), E_\varphi(r))$ としてよい。

(1) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x})$$

とガウスの定理を用いて r 方向の電場 $E_r(r)$ を求めよ。ここで $\rho(\mathbf{x})$ は電荷密度を表す。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし θ 方向と φ 方向の電場はゼロとしてよい。

(2) $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ とストークスの定理を用いて θ 方向の電場 $E_\theta(r)$ はゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(3) $\theta = \pi/2$ 面上での電気力線を書け。

(4) (1) の結果を用いて静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。

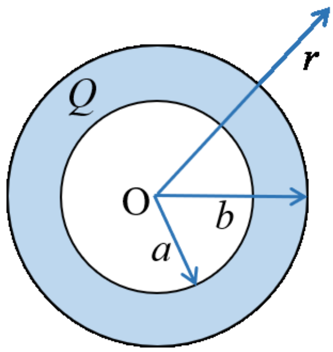

図 1: 半径 a の球面と半径 b の球面の間に全電荷 Q が一様に分布する。

(5) $\theta = \pi/2$ 面上での静電ポテンシャルの等値線を書け。

(6) デカルト座標 (x, y, z) を用いて (4) で求めた静電ポテンシャルから電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_x(\mathbf{x}), E_y(\mathbf{x}), E_z(\mathbf{x}))$ を求めよ。

(7) デカルト座標を用いて (6) で求めた電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ の発散 $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$ を計算せよ。

問題2

無限に長い円筒に一様に定常な電流が流れている（図2)。以下の設問にしたがって、この電流がつくる静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ を求めよ。電流を I、円筒の半径は a とする。座標は円筒の中心軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_r(r), B_\theta(r), B_z(r))$ としてよい。

(1) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ とガウスの定理を用いて r 方向の磁場 $B_r(r)$ はゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(2) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて θ 方向の磁場 $B_\theta(r)$ を求めよ。ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は電流密度を表す。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(3) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて z 方向の磁場 $B_z(r)$ はゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(4) 磁力線を書け。
(5) デカルト座標 (x, y, z) を用いて磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_x(\mathbf{x}), B_y(\mathbf{x}), B_z(\mathbf{x}))$ を求めよ。ただし、$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = B_\theta \mathbf{e}_\theta$ とし、(2) で求めた B_θ を用いよ。また

$$\mathbf{e}_\theta = -\frac{y}{r}\mathbf{e}_x + \frac{x}{r}\mathbf{e}_y$$

と $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を用いてよい。
(6) デカルト座標を用いて (5) で求めた磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ の回転の z 成分 $[\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x})]_z$ を計算せよ。

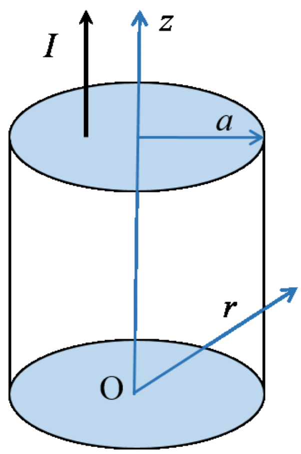

図 2: 無限に長い円筒に一様に定常な電流が流れる。

問題 3

以下の設問にしたがって、無限に長い直線ソレノイド（図 3）がつくる静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ を求めよ。ソレノイドに流れている電流を I、ソレノイドの半径は a とする。また、単位長さあたりの巻き数は n とする。特に断らない限り、座標はソレノイドの中心軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_r(r), B_\theta(r), B_z(r))$ としてよい。

(1) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ とガウスの定理を用いて r 方向の磁場 $B_r(r)$ はゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(2) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて θ 方向の磁場 $B_\theta(r)$ はゼロであることを示せ。ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は電流密度を表す。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(3) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いてソレノイド外の z 方向の磁場 $B_z(r)$ を求めよ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(4) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いてソレノイド内の z 方向の磁場 $B_z(r)$ を求めよ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(5) 磁力線を書け。

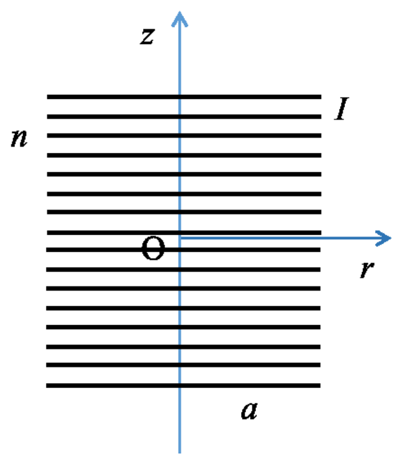

図 3: 無限に長い直線ソレノイド。