2020年度 物理学基礎論B レポート試験問題

後期木曜日2限 石澤明宏

他者の解答を見るあるいは他者に解答を見せた場合、採点の対象になりません。問題は3問である。表紙に、氏名、学生番号、所属学部 (および学科)、入学年、回生、組を書くこと。解答は答のみならず，それを導いた計算過程をできるだけ詳しく記述すること。教科書の例題とは異なるので、問題を良く読んで間違えないようにすること。全ての問題について、真空の誘電率を ϵ_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

問題1

以下の設問にしたがって、無限に長い半径 a の円柱内に一様に分布した電荷（図1）がつくる静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ を求めよ。座標系は電荷が分布している円柱の軸を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いよ。電荷は z 方向に単位長さ当たりの密度 λ（定数 $\lambda > 0$）で分布する。つまり、電荷密度は円柱内で $\rho(r) = \lambda/(\pi a^2)$ であるとする。対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_r(r), E_\theta(r), E_z(r))$ としてよい。

(1) $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ とストークスの定理を用いて θ 方向の電場 $E_\theta(r)$ がゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(2) $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ とストークスの定理を用いて z 方向の電場 $E_z(r)$ がゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(3) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x})$$

とガウスの定理を用いて r 方向の電場 $E_r(r)$ を求めよ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(4) $z = 0$ 面上の電気力線を書け。

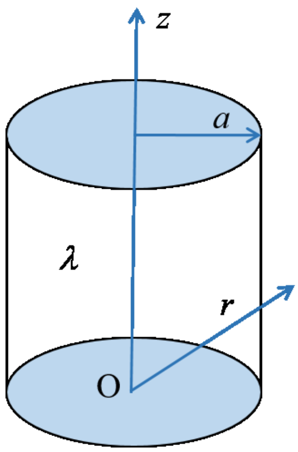

図1: 無限に長い円柱内に一様に分布した電荷。

問題2

無限に長い半径 a の円筒と半径 b の円筒の間に一様に定常な電流が流れている（図2）。ここで電流を I とし、$a < b$ とする。以下の設問にしたがって、この電流がつくる静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ を求めよ。座標は円筒の中心軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_r(r), B_\theta(r), B_z(r))$ としてよい。

(1) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ とガウスの定理を用いて r 方向の磁場 $B_r(r)$ はゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(2) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて θ 方向の磁場 $B_\theta(r)$ を求めよ。ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は電流密度を表す。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(3) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて z 方向の磁場 $B_z(r)$ はゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(4) $z = 0$ 面上の磁力線を書け。

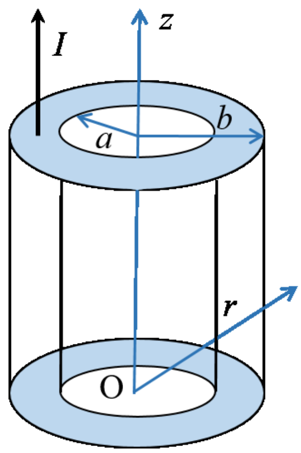

図 2: 無限に長い半径 a の円筒と半径 b の円筒の間に一様に定常な電流が流れている。

問題 3

図 3 のように面積 S の円盤（半径 a）からなる平行板コンデンサーに一様に電荷が分布する（上の円盤に全電荷 $-Q(t)$ 下の円盤に全電荷 $Q(t)$ が一様に分布する）。そして、その電荷は $Q(t) = Q_e \sin(\omega t)$ のように時間変化する。以下の設問にしたがって、電場と磁場を求めよ。ただし、円盤間の距離 d は半径 a より十分小さく（$a \gg d$）、コンデンサーの端の効果はないとする。座標系は円盤の中心をとおり円盤に垂直な直線を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_r(r,t), E_\theta(r,t), E_z(r,t))$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = (B_r(r,t), B_\theta(r,t), B_z(r,t))$ としてよい。
(1) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t)$$

とガウスの定理を用いてコンデンサー内の z 方向の電場 $E_z(r,t)$ を求めよ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし r 方向と θ 方向の電場およびコンデンサー外の電場はゼロとしてよい。
(2) (1) の結果とアンペール・マクスウェルの法則

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

とストークスの定理を用いてコンデンサー内の θ 方向の磁場 $B_\theta(r,t)$ を求めよ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし r 方向と z 方向の磁場はゼロとしてよい。

(3) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t)$$

とガウスの定理を用いてコンデンサー内の r 方向の電場 $E_r(r, t)$ がゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(4) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$ とガウスの定理を用いてコンデンサー内の r 方向の磁場 $B_r(r, t)$ がゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(5) ファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

とストークスの定理を用いてコンデンサー内の θ 方向の電場 $E_\theta(r)$ がゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし z 方向の磁場はゼロとしてよい。

(6) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$ とガウスの定理を用いてコンデンサー内の z 方向の磁場 $B_z(r, t)$ がゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただしコンデンサー外の z 方向の磁場はゼロとしてよい。

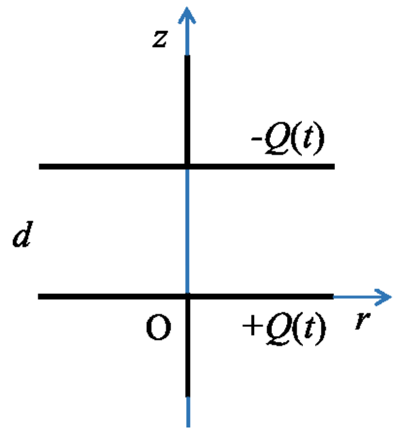

図 3: 面積 S の円盤（半径 a）からなる平行板コンデンサーに一様に電荷が分布する。そして、その電荷は $Q(t) = Q_e \sin(\omega t)$ のように時間変化する。