2019年度 物理学基礎論B 試験問題

後期木曜日2限 石澤明宏

問題は4問である。全ての解答用紙に、氏名、学生番号、所属学部(および学科)、入学年、回生、組を書くこと。解答は答のみならず，それを導いた計算過程をできるだけ詳しく記述すること。教科書の例題とは異なるので、問題を良く読んで間違えないようにすること。全ての問題について、真空の誘電率を ϵ_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

問題1

以下の設問にしたがって、無限に長い直線上に一様に分布した電荷（図1）がつくる静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ を求めよ。電荷の線密度を定数 λ（$\lambda > 0$）とする。座標系は電荷が分布している直線を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_r(r), E_\theta(r), E_z(r))$ としてよい。

(1) $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ とストークスの定理を用いて θ 方向の電場 $E_\theta(r)$ がゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(2) $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ とストークスの定理を用いて z 方向の電場 $E_z(r)$ がゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(3) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x})$$

とガウスの定理を用いて r 方向の電場 $E_r(r)$ を求めよ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(4) (3) の結果を用いて静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。

(5) $z = 0$ 面上の電気力線を書け。

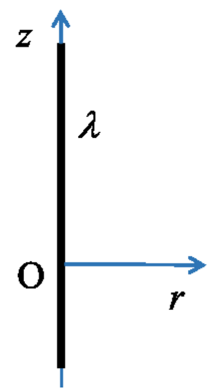

図 1: 無限に長い直線状に一様に分布した電荷。

問題2

点電荷 q がつくる静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

である。ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり、点電荷は原点にあるとする。以下の設問に答えよ。座標系はデカルト座標系 (x, y, z) を用いよ。

(1) この静電ポテンシャルから電場を求めよ。

(2) (1) で求めた電場は $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ を満たすことを示せ。ただし、x 成分が 0 になることを示せば、y, z 成分も同様に 0 であるとしてよい。

(3) (1) で求めた電場は原点以外で $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ を満たすことを示せ。

(4) $z = 0$ 面上での電気力線を書け。

問題 3

無限に長い円筒に一様に定常な電流が流れている（図 2）。以下の設問にしたがって、この電流がつくる静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ を求めよ。電流を I、円筒の半径は a とする。座標は円筒の中心軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_r(r), B_\theta(r), B_z(r))$ としてよい。

(1) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ とガウスの定理を用いて r 方向の磁場 $B_r(r)$ はゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(2) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて θ 方向の磁場 $B_\theta(r)$ を求めよ。ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は電流密度を表す。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(3) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて z 方向の磁場 $B_z(r)$ はゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(4) 磁力線を書け。

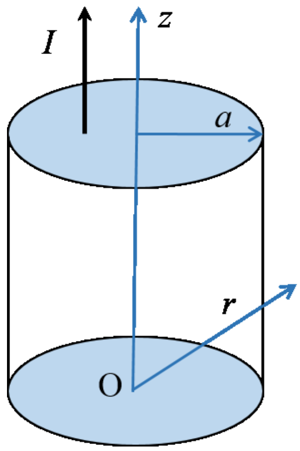

図 2: 無限に長い円筒に一様に定常な電流が流れる。

問題 4

真空中を電磁波が平面波として伝播している。以下の設問に答えよ。

(1) マクスウェル方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

から電場に対する波動方程式を導け。ただし、ベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ を用いてよい。

(2) 電磁波の電場はデカルト座標系 (x, y, z) を用いて

$$\mathbf{E} = (E_x(z, t), E_y, E_z) = (E_0 \sin(\omega t - kz), 0, 0)$$

で与えられるとする。電場の x 成分 $E_x(z, t)$ は (1) で導いた波動方程式を満足することを用いて ω と k の関係式を導け。