2018 年度 物理学基礎論 B 試験問題

後期木曜日 2 限 石澤明宏

問題は 3 問である。全ての解答用紙に、氏名、学生番号、所属学部 (および学科)、入学年、回生、組を書くこと。解答は答のみならず，それを導いた計算過程をできるだけ詳しく記述すること。教科書の例題とは異なるので、問題を良く読んで間違えないようにすること。全ての問題について、真空の誘電率を ϵ_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

問題 1

以下の設問にしたがって、半径 a の球内に全電荷 Q（$Q > 0$）が一様に分布するとき（図 1）の静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ などを求めよ。座標系は球の中心を原点とする球座標系 (r, θ, φ) を用いよ。対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_r(r), E_\theta(r), E_\varphi(r))$ としてよい。

(1) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x})$$

とガウスの定理を用いて r 方向の電場 $E_r(r)$ を求めよ。ここで $\rho(\mathbf{x})$ は電荷密度を表す。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし θ 方向と φ 方向の電場はゼロとしてよい。

(2) $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ とストークスの定理を用いて θ 方向の電場 $E_\theta(r)$ はゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(3) $\theta = 0$ 面上での電気力線を書け。

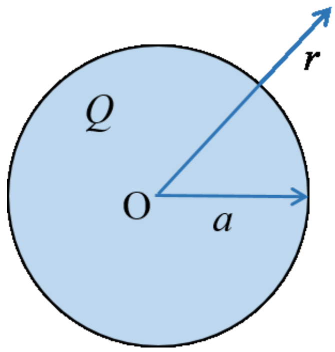

図 1: 半径 a の球内に全電荷 Q が一様に分布する。

(4) (1) の結果を用いて静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。

(5) $\theta = 0$ 面上での静電ポテンシャルの等値線を書け。

(6) 静電場のエネルギー U_e を求めよ。

(7) デカルト座標 (x, y, z) を用いて (4) で求めた静電ポテンシャルから電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_x(\mathbf{x}), E_y(\mathbf{x}), E_z(\mathbf{x}))$ を求めよ。

問題 2

以下の設問にしたがって、無限に長い直線ソレノイド（図 2）がつくる静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ を求めよ。ソレノイドに流れている電流を I、ソレノイドの半径は a とする。また、単位長さあたりの巻き数は n とする。座標はソレノイドの中心軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_r(r), B_\theta(r), B_z(r))$ としてよい。

(1) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ とガウスの定理を用いて r 方向の磁場 $B_r(r)$ はゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(2) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて θ 方向の磁場 $B_\theta(r)$ はゼロであることを示せ。ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は電流密度を表す。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(3) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いてソレノイド外の z 方向の磁場 $B_z(r)$ を求めよ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(4) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いてソレノイド内の z 方向の磁場 $B_z(r)$ を求めよ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(5) 磁力線を書け。

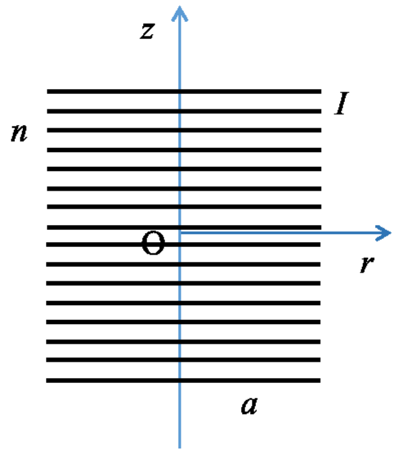

図 2: 無限に長い直線ソレノイド。

問題 3

無限に長い円筒に一様に定常な電流が流れている（図 3）。以下の設問にしたがって、この電流がつくる静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ を求めよ。電流を I、円筒の半径は a とする。座標は円筒の中心軸を z 軸とする円柱座標 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_r(r), B_\theta(r), B_z(r))$ としてよい。

(1) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ とガウスの定理を用いて r 方向の磁場 $B_r(r)$ はゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(2) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて θ 方向の磁場 $B_\theta(r)$ を求めよ。ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は電流密度を表す。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(3) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて z 方向の磁場 $B_z(r)$ はゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(4) 磁力線を書け。

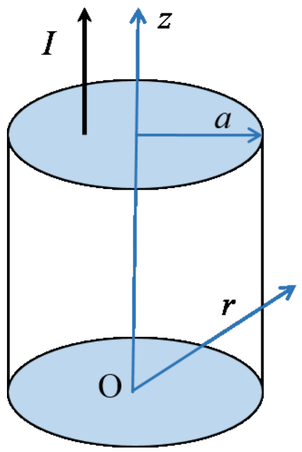

図 3: 無限に長い円筒に一様に定常な電流が流れる。