2017年度 物理学基礎論B 試験問題

後期木曜日2限 石澤明宏

問題は3問である。全ての解答用紙に、氏名、学生番号、所属学部(および学科)、入学年、回生、組を書くこと。解答は答のみならず，それを導いた計算過程を記述すること。教科書の例題とは異なるので、問題を良く読んで間違えないようにすること。全ての問題について、真空の誘電率を ϵ_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

問題1

以下の設問にしたがって、直線電流 I（図1）が作る静磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ などを求めよ。座標系は電流が流れている直線を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_r(r), B_\theta(r), B_z(r))$ としてよい。

(1) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて θ 方向の磁場 $B_\theta(r)$ を求めよ。ここで $\mathbf{i}(\mathbf{x})$ は電流密度を表す。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし r 方向と z 方向の磁場はゼロとしてよい。
(2) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ とガウスの定理を用いて r 方向の磁場 $B_r(r)$ はゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(3) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて z 方向の磁場 $B_z(r)$ はゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。
(4) $z = 0$ 面上の磁力線を書け。
(5) $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})$ を計算し、(1), (2), (3) で得た磁場は $r \neq 0$ で $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ を満たすことを示せ。

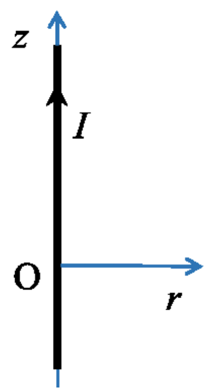

図1: 直線電流 I。

問題 2

以下の設問にしたがって、半径 a の球内に全電荷 Q（$Q > 0$）が一様に分布するとき（図 2）の静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ などを求めよ。座標系は球の中心を原点とする球座標系 (r, θ, φ) を用いよ。対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_r(r), E_\theta(r), E_\varphi(r))$ としてよい。

(1) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x})$$

とガウスの定理を用いて r 方向の電場 $E_r(r)$ を求めよ。ここで $\rho(\mathbf{x})$ は電荷密度を表す。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし θ 方向と φ 方向の電場はゼロとしてよい。

(2) $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ とストークスの定理を用いて θ 方向の電場 $E_\theta(r)$ はゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(3) $\theta = 0$ 面上での電気力線を書け。

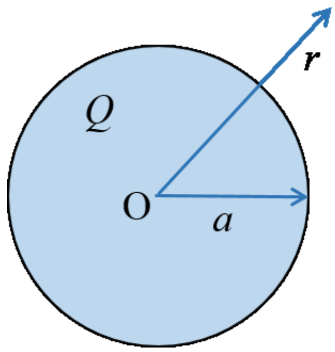

図 2: 半径 a の球内に全電荷 Q が一様に分布する。

(4) (1) の結果を用いて静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。

(5) $\theta = 0$ 面上での静電ポテンシャルの等値線を書け。

(6) 静電場のエネルギー U_e を求めよ。

問題 3

点電荷 q がつくる静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

である。ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり、点電荷は原点にあるとした。以下の設問に答えよ。座標系はデカルト座標系 (x, y, z) を用いよ。

(1) この静電ポテンシャルから電場を求めよ。

(2) (1) で求めた電場は

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$$

を満たすことを示せ。ただし、x 成分が 0 になることを示せば、y, z 成分も同様に 0 であるとしてよい。

(3) (1) で求めた電場は原点以外で

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$$

を満たすことを示せ。

(4) $z = 0$ 面上での電気力線を書け。

(5) (1) で求めた電場内で、質量 m、電荷 e をもつ質点（点電荷）が運動するとき、この質点の運動エネルギーと位置エネルギー $e\phi(\mathbf{x})$ の和が時間変化しないことを示せ。