2016年度 物理学基礎論B 試験問題

後期木曜日1限 石澤明宏

問題は3問である。全ての解答用紙に、氏名、学生番号、所属学部(および学科)、入学年、回生、組を書くこと。解答は答のみならず，それを導いた計算過程を記述すること。教科書の例題とは異なるので、問題を良く読んで間違えないようにすること。全ての問題について、真空の誘電率を ϵ_0、真空の透磁率を μ_0 とする。

問題1

以下の設問にしたがって、無限に長い直線上に一様に分布した電荷（図1）がつくる静電場 $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ を求めよ。電荷の線密度を定数 λ（$\lambda > 0$）とする。座標系は電荷が分布している直線を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = (E_r(r), E_\theta(r), E_z(r))$ としてよい。

(1) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x})$$

とガウスの定理を用いて r 方向の電場 $E_r(r)$ を求めよ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし z 方向と θ 方向の電場はゼロとしてよい。

(2) $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ とストークスの定理を用いて θ 方向の電場 $E_\theta(r)$ がゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(3) (1) の結果を用いて静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めよ。

(4) $z = 0$ 面上の電気力線を書け。

(5) $z = 0$ 面上の静電ポテンシャルの等値線を書け。

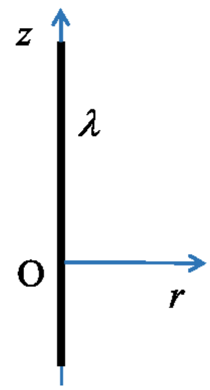

図 1: 無限に長い直線状に一様に分布した電荷。

問題2

以下の設問にしたがって、直線電流 I（図2）が作る静磁場を求めよ。座標系は電流が流れている直線を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = (B_r(r), B_\theta(r), B_z(r))$ としてよい。

(1) アンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x})$ とストークスの定理を用いて θ 方向の磁場 $B_\theta(r)$ を求めよ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし r 方向と z 方向の磁場はゼロとしてよい。

(2) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0$ とガウスの定理を用いて r 方向の磁場 $B_r(r)$ はゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(3) $z = 0$ 面上の磁力線を書け。

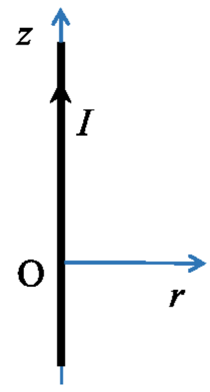

図 2: 直線電流 I。

問題 3

図 3 のように面積 S の円盤（半径 a）からなる平行板コンデンサーに一様に電荷が分布する（上の円盤に全電荷 $-Q(t)$ 下の円盤に全電荷 $Q(t)$ が一様に分布する）。そして、その電荷は $Q(t) = Q_e \sin(\omega t)$ のように時間変化する。以下の設問にしたがって、電場と磁場を求めよ。ただし、円盤間の距離 d は半径 a より十分小さく（$a \gg d$）、コンデンサーの端の効果はないとする。座標系は円盤の中心をとおり円盤に垂直な直線を z 軸とする円柱座標系 (r, θ, z) を用いよ。対称性より $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = (E_r(r,t), E_\theta(r,t), E_z(r,t))$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = (B_r(r,t), B_\theta(r,t), B_z(r,t))$ としてよい。

(1) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t)$$

とガウスの定理を用いてコンデンサー内の z 方向の電場 $E_z(r,t)$ を求めよ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし r 方向と θ 方向の電場はゼロとしてよい。

(2) (1) の結果とアンペール・マクスウェルの法則

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu_0 \mathbf{i}(\mathbf{x}, t) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

とストークスの定理を用いてコンデンサー内の θ 方向の磁場 $B_\theta(r,t)$ を求めよ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし r 方向と z 方向の磁場はゼロとしてよい。

(3) ガウスの法則

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0}\rho(\mathbf{x}, t)$$

とガウスの定理を用いてコンデンサー内の r 方向の電場 $E_r(r,t)$ がゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(4) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$ とガウスの定理を用いてコンデンサー内の r 方向の磁場 $B_r(r,t)$ がゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。

(5) ファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

とストークスの定理を用いてコンデンサー内の θ 方向の磁場 $E_\theta(r)$ がゼロであることを示せ。ストークスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただし z 方向の磁場はゼロとしてよい。

(6) 磁場のガウスの法則 $\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0$ とガウスの定理を用いてコンデンサー内の z 方向の磁場 $B_z(r,t)$ がゼロであることを示せ。ガウスの定理を用いるときの積分領域を図示すること。ただしコンデンサー外の z 方向の磁場はゼロとしてよい。

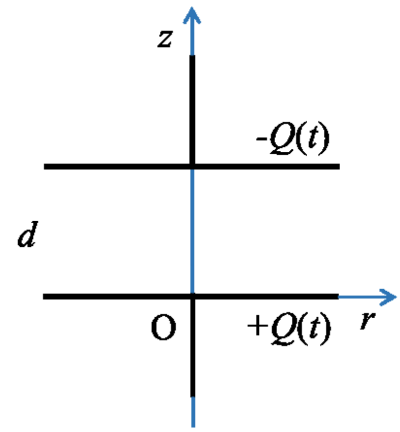

図 3: 面積 S の円盤（半径 a）からなる平行板コンデンサーに一様に電荷が分布する。そして、その電荷は $Q(t) = Q_e \sin(\omega t)$ のように時間変化する。