2018年度 電磁流体物理学II 試験問題

後期木曜日4限 石澤明宏

問題は3問である。全ての解答用紙に、氏名、学生番号、所属研究科を書くこと。解答は答のみならず，それを導いた計算過程を記述すること。

問題1

下記の問いに答えよ。

(1) 電磁流体方程式（MHD 方程式）を書け。

(2) (1) の MHD 方程式の各項が持つ物理的意味を文章や図で説明せよ。

(3) MHD 方程式中のローレンツ力項 $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ はアンペールの法則 $\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}$ を用いて、

$$\mathbf{J}\times\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{B}-\nabla\frac{B^2}{2\mu_0}$$

と表すことができることを示せ。そして、右辺の二つの項の物理的意味を説明せよ。

(4) 以下の関係式を示せ。

$$\mathbf{J}\times\mathbf{B}=\frac{1}{\mu_0}(B^2\kappa-B\nabla_\perp B)$$

ここで、$\kappa=\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}$ は磁場の曲率ベクトル、$\nabla_\perp=\nabla-\mathbf{bb}\cdot\nabla$ は磁場に垂直方向の勾配を表し、$\mathbf{b}=\mathbf{B}/B$ である。

(5) フルート近似について文章や図を用いて説明せよ。

(6) 磁場閉じ込めプラズマにおける電磁流体（MHD) 不安定性は二種類に大別される。この二種類の不安定性について不安定性が起こる機構や不安定性が持つ性質を文章や図で説明せよ。

問題2

一様な磁場中に一様な密度、圧力のプラズマがある。以下の設問に従って、このプラズマ中を伝搬する電磁流体（MHD) 波動を説明せよ。

(1) MHD 波動は三種類ある。この三種類の波動の名前を答えよ。

(2) 図および文章で、三種類の波動の伝播の機構及び波動の性質を説明せよ。

(3) 非圧縮二次元電磁流体方程式

$$\frac{\partial\nabla^2\phi}{\partial t}+[\phi,\nabla^2\phi]=v_A^2[\psi,\nabla^2\psi],$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+[\phi,\psi]=0,$$

に $f(x,y,t)=f_0(x)+\epsilon f_1(x,y,t)$ を代入して線形化せよ。座標系は、一様な磁場を y 方向とするデカルト座標系 (x,y,z) を用いよ。ここで、磁場 $\mathbf{B}=-B_0\mathbf{e}_z\times\nabla\psi$, 速度場

$\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla\phi$, そして $\phi = \phi(x, y, t)$, $\psi = \psi(x, y, t)$, とした。また、平衡は $\psi = \psi_0(x) = -x$ として良い。$v_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}$ はアルヴェン速度、

$$[f, g] = \mathbf{e}_z \cdot \nabla f \times \nabla g = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

である。

(4) 線形化した方程式に $f_1(x, y, t) = \hat{f}_1 \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y)$ を代入して非圧縮二次元電磁流体の分散関係式（アルヴェン波の分散関係式）を導け。

問題 3

非圧縮二次元流体方程式

$$\frac{\partial \nabla^2\phi}{\partial t} + [\phi, \nabla^2\phi] = -\frac{\alpha}{\rho_0}\mathbf{e}_z \times \mathbf{g} \cdot \nabla p,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [\phi, p] = 0,$$

にしたがう中性流体がある。ここで、速度場 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla\phi$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$、そして $\phi = \phi(x, y, t)$, $p = p(x, y, t)$, とした。以下の設問に従って、レイリー・テイラー不安定性を説明せよ。座標系はデカルト座標系 (x, y, z) を用いよ。

(1) レイリー・テイラー不安定性について不安定性が起こる機構や不安定性が持つ性質を文章や図で説明せよ。

(2) $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla\phi$ とおくことにより、$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ は常に満たされることを示せ。

(3) $\phi_0 = 0$, $p_0(y)$ は、非圧縮二次元流体方程式の平衡解であることを示せ。

(4) ϕ, p を (3) の平衡解 $f_0(y)$ と揺動部分 $\epsilon f_1(x, y, t)$ に分けて非圧縮二次元流体方程式に代入し、線形化せよ。

(5) 線形化した方程式に $f_1(x, y, t) = \hat{f}_1 \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y)$ を代入してレイリー・テイラー不安定性の分散関係式を導け。

(6) レイリー・テイラー不安定性の安定条件を書け。