

2017年度 電磁流体物理学II 試験問題

後期木曜日4限 石澤明宏

問題は3問である。全ての解答用紙に、氏名、学生番号、所属研究科を書くこと。
解答は答のみならず、それを導いた計算過程を記述すること。

問題1

下記の問いに答えよ。

- (1) 電磁流体方程式 (MHD 方程式) を書け。
- (2) (1) の MHD 方程式の各項が持つ物理的意味を文章や図で説明せよ。
- (3) フルート近似について文章や図を用いて説明せよ。
- (4) MHD オーダリングとドリフトオーダリングについて説明せよ。
- (5) MHD 方程式中のローレンツ力項 $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ はアンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ を用いて、

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla \frac{B^2}{2\mu_0}$$

と表すことができることを示せ。そして、右辺の二つの項の物理的意味を説明せよ。

- (6) 以下の関係式を示せ。

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (B^2 \boldsymbol{\kappa} - B \nabla_{\perp} B)$$

ここで、 $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}$ は磁場の曲率ベクトル、 $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{b} \mathbf{b} \cdot \nabla$ は磁場に垂直方向の勾配を表し、 $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ である。

問題2

モデル方程式

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} - a f(x,t) \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 0,$$

を考える。以下の設問に答えよ。

- (1) 平衡解 $f_0(x)$ を求めよ。
- (2) f を (1) で求めた平衡および揺動に分けて $f(x,t) = f_0(x) + \epsilon f_1(x,t)$ 、モデル方程式に代入し、線形化した方程式を導け。
- (3) 線形化した方程式に $f_1(x,t) = \hat{f}_1 \exp(-i\omega t + ik_x x)$ を代入して分散関係式を導け。
- (4) 不安定になる条件を導け。

問題3

非圧縮二次元流体方程式

$$\frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial t} + [\phi, \nabla^2 \phi] = -\frac{\alpha}{\rho_0} \mathbf{e}_z \times \mathbf{g} \cdot \nabla p,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [\phi, p] = 0,$$

にしたがう中性流体がある。ここで、速度場 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \phi$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_y$ 、そして $\phi = \phi(x, y, t)$, $p = p(x, y, t)$, とした。以下の設問に従って、レイリー・テイラー不安定性を説明せよ。座標系はデカルト座標系 (x, y, z) を用いよ。

(1) レイリー・テイラー不安定性について不安定性が起こる機構や不安定性が持つ性質を文章や図で説明せよ。

(2) $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \phi$ とおくことにより、 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ は常に満たされることを示せ。

(3) $\phi_0 = 0$, $p_0(y)$ は、非圧縮二次元流体方程式の平衡解であることを示せ。

(4) ϕ , p を (3) の平衡解 $f_0(y)$ と揺動部分 $\epsilon f_1(x, y, t)$ に分けて非圧縮二次元流体方程式に代入し、線形化せよ。

(5) 線形化した方程式に $f_1(x, y, t) = \hat{f}_1 \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y)$ を代入してレイリー・テイラー不安定性の分散関係式を導け。

(6) レイリー・テイラー不安定性の安定条件を書け。