2016年度 電磁流体物理学II 試験問題

後期木曜日4限 石澤明宏

問題は3問である。全ての解答用紙に、氏名、学生番号、所属研究科を書くこと。解答は答のみならず，それを導いた計算過程を記述すること。

電磁流体（MHD) は以下の MHD 方程式にしたがう。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \qquad \rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \mathbf{J}\times\mathbf{B},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla p + \gamma_0 p\nabla\cdot\mathbf{u} = 0,$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J}.$$

必要ならばこれを使って以下の例題を解くこと。ただし、比熱比を γ_0 とする。

問題1

下記の問いに答えよ。

(1) 磁場閉じ込めプラズマにおける電磁流体（MHD) 不安定性は2種類に大別される。この二種類を答えよ。

(2) (1) の二種類の不安定性について不安定性が起こる機構や不安定性が持つ性質を文章や図で説明せよ。

(3) フルート近似について文章や図を用いて説明せよ。

(4) 磁場のプラズマへの凍りつきを、文章や図を用いて説明するとともに、MHD 方程式を用いて磁場のプラズマへの凍りつきを示せ。

問題2

一様な磁場中に一様な密度、圧力のプラズマがある。以下の設問に従って、このプラズマ中を伝搬する電磁流体（MHD) 波動を説明せよ。

(1) MHD 波動は三種類ある。この三種類の波動の名前を答えよ。

(2) 図および文章で、三種類の波動の伝播の機構及び波動の性質を説明せよ。

(3) 非圧縮二次元電磁流体方程式

$$\frac{\partial \nabla^2\phi}{\partial t} + [\phi, \nabla^2\phi] = v_A^2[\psi, \nabla^2\psi],$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + [\phi, \psi] = 0,$$

に $f(x,y,t) = f_0(x) + \epsilon f_1(x,y,t)$ を代入して線形化せよ。座標系は、一様な磁場を y 方向とするデカルト座標系 (x,y,z) を用いよ。ここで、磁場 $\mathbf{B} = -B_0\mathbf{e}_z\times\nabla\psi$, 速度場 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z\times\nabla\phi$,

そして $\phi = \phi(x, y, t)$, $\psi = \psi(x, y, t)$, とした。また、平衡は $\psi = \psi_0(x) = -x$ として良い。$v_A = B_0/\sqrt{\mu_0\rho_0}$ はアルヴェン速度、

$$[f, g] = \mathbf{e}_z \cdot \nabla f \times \nabla g = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

である。

(4) 線形化した方程式に $f_1(x, y, t) = \hat{f}_1 \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y)$ を代入して非圧縮二次元電磁流体の分散関係式（アルヴェン波の分散関係式）を導け。

問題 3

非圧縮二次元電磁流体方程式にしたがうプラズマがある。以下の設問に従って、磁場の曲率ベクトル κ_0 に平行または反平行な方向に圧力勾配がある場合の交換型不安定性を説明せよ。

(1) 交換型不安定性について不安定性が起こる機構や不安定性が持つ性質を文章や図で説明せよ。

(2) 非圧縮二次元電磁流体方程式（交換型不安定性項を加えた）

$$\frac{\partial \nabla^2 \phi}{\partial t} + [\phi, \nabla^2 \phi] = v_A^2[\psi, \nabla^2 \psi] + \frac{2}{\rho_0}\mathbf{e}_z \times \kappa_0 \cdot \nabla p,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + [\phi, \psi] = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [\phi, p] = 0,$$

に $f(x, y, t) = f_0(x) + \epsilon f_1(x, y, t)$ を代入して線形化せよ。ただし計算を簡単にするために、第 1 式右辺の $v_A^2[\psi, \nabla^2 \psi]$ 項は無視してよい。また、これに伴い第 2 式は解く必要がない。ここで、速度場 $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \phi$, $\phi = \phi(x, y, t)$, $p = p(x, y, t)$ とした。座標系は曲率ベクトルが $-x$ 方向となるデカルト座標系 (x, y, z) を用いよ。平衡は $p = p_0(x)$, $\phi = \phi_0 = 0$, $\kappa_0 = -\kappa_0 \mathbf{e}_x$ とする。また、

$$[f, g] = \mathbf{e}_z \cdot \nabla f \times \nabla g = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

である。

(3) 線形化した方程式に $f_1(x, y, t) = \hat{f}_1 \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y)$ を代入して交換型不安定性の分散関係式を導け。

(4) 交換型不安定性の安定条件を書け。